

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

31. Band, Heft 7

27. Oktober 1949

S. 289—336

Analysis.

Mengenlehre:

Sierpiński, Waclaw: Les correspondances multivoques et l'axiome du choix. Fundam. Math., Warszawa 34, 39—44 (1947).

Zwischen zwei Mengen P und Q soll eine beiderseits n -deutige Zuordnung bestehen, wenn durch die Zuordnung jedem Element von P genau n Elemente von Q entsprechen und wenn jedes Element von Q genau n Elementen von P zugeordnet ist. Nach einem Satz von D. König gibt es dann auch eine eindeutige Zuordnung der Elemente von P und Q derart, daß sich zwei Elemente p und q nur dann entsprechen, wenn sie durch die beiderseits n -deutige Zuordnung aufeinander bezogen sind. Der Beweis macht von dem Auswahlaxiom Gebrauch. Verf. beweist den Satz von König für $n = 2$ unter Benutzung des Auswahlaxioms für eine Menge von disjunkten Mengen mit zwei Elementen. Ferner wird gezeigt, daß ein Beweis des Theorems für $n = 2$ ohne Auswahlaxiom auch den Nachweis einer im Lebesgueschen Sinne nicht meßbaren Menge ohne Auswahlaxiom ergeben würde, so daß bei dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft an einen Beweis des Satzes von König ohne Auswahlaxiom auch für $n = 2$ nicht zu denken ist. *Ackermann.*

Mostowski, Andrzej: On the principle of dependent choices. Fundam. Math., Warszawa 35, 127—130 (1948).

Folgende abgeschwächte Form (T') des Auswahlaxioms wird betrachtet: Es sei R eine binäre Relation und B eine nicht leere Menge, und für jedes Element x von B soll es ein y von B geben, so daß xRy . Dann gibt es eine Folge x_1, x_2, \dots von Elementen von B , so daß immer $x_n R x_{n+1}$. Aus (T') ist offenbar das eingeschränkte Auswahlaxiom, nämlich die Behauptung ableitbar, daß für jede abzählbare Menge M von nicht leeren, paarweise disjunkten Menge eine Menge existiert, die mit jedem Element von M gerade ein Element gemeinsam hat. Das Ziel ist zu zeigen, daß das allgemeine Auswahlaxiom mit Hilfe von (T') und den üblichen sonstigen mengentheoretischen Axiomen nicht bewiesen werden kann. Der Unabhängigkeitsbeweis läßt sich im Rahmen eines vom Verf. früher [Fundam. Math., Warszawa 32, 201—252 (1939); dies. Zbl. 22, 120] aufgestellten mengentheoretischen Axiomensystems S führen. S bleibt, wie Verf. angibt, widerspruchsfrei nach Adjunktion des folgenden Axioms (N): Es gibt eine nicht abzählbare Menge von Elementen, die keine Mengen sind; ferner nach Gödel bei weiterer Hinzufügung des allgemeinen Auswahlaxioms. In dem durch diese beiden Axiome erweiterten System läßt sich nun ein Modell für Mengen, Klassen usw. konstruieren, so daß alle Axiome von S und auch (T') befriedigt werden, während das allgemeine Auswahlaxiom falsch wird. Selbstverständlich gilt der Unabhängigkeitsbeweis nur unter der Annahme, daß S selbst widerspruchsfrei ist. *Ackermann (Lüdenscheid).*

Tarski, Alfred: Axiomatic and algebraic aspects of two theorems on sums of cardinals. Fundam. Math., Warszawa 35, 79—104 (1948).

Als formale Basis der Überlegungen dient das Zermelosche Axiomensystem für die Mengenlehre ohne Auswahlaxiom, aber unter Hinzufügung des Fraenkelschen Ersetzungsaxioms. Betrachtet werden die folgenden beiden Theoreme: I. Sei A_1, A_2, \dots eine Folge von Mengen. Wenn dann eine Menge B einer Teilmenge der Vereinigungsmenge der A_i äquivalent ist, dann ist entweder B dieser Vereinigungsmenge selbst äquivalent oder aber für ein gewisses p einer Teilmenge der Vereinigung von A_1, A_2, \dots, A_p . II. A_i habe die gleiche Bedeutung wie vorher.

Wenn für jedes p die Vereinigungsmenge von A_1, A_2, \dots, A_p einer Teilmenge von B äquivalent ist, so ist die Vereinigungsmenge aller A_i einer Teilmenge von B äquivalent. Es wird gezeigt: I ist dem Auswahlaxiom logisch gleichwertig. II ist aus dem eingeschränkten Auswahlaxiom (vgl. das vorsteh. Referat) ableitbar. Die Implikation $I \rightarrow II$ kann ohne Auswahlaxiom bewiesen werden. Daß das Umgekehrte nicht der Fall ist, geht aus der vorstehend besprochenen Arbeit von Mostowski hervor. Eine modifizierte Form von II ist folgende: III. Wenn eine Folge von umkehrbar eindeutigen Funktionen f_n gegeben ist, derart, daß f_p die Vereinigungsmenge von A_1, \dots, A_p auf eine Untermenge von B abbildet, dann existiert auch eine umkehrbar eindeutige Funktion f , die die Vereinigungsmenge aller A_i auf eine Untermenge von B abbildet. III kann dann ohne Auswahlaxiom bewiesen werden; der Beweis ist effektiv in dem Sinne, daß die Funktion f , deren Existenz behauptet wird, mit Hilfe der in der Voraussetzung auftretenden Mengen und Funktionen konstruiert werden kann. II gestattet eine Verallgemeinerung und Übertragung auf Boolesche Algebren; es wird eine Klasse von Algebren näher bestimmt, für die das Theorem gültig ist. Für I ist eine derartige Verallgemeinerung anscheinend nicht möglich. I und II können als Repräsentanten zweier sehr verschiedenen Arten von Theoremen, von denen mehrere genannt werden, betrachtet werden, für die das Verhältnis zum Auswahlaxiom das gleiche ist. *Ackermann.*

Kuratowski, Casimir: Ensembles projectifs et ensembles singuliers. *Fundam. Math.*, Warszawa **35**, 131—140 (1948).

Unter den projektiven Mengen versteht man die in einem Euklidischen Raum von n Dimensionen gelegenen Mengen, die sich aus den abgeschlossenen Mengen durch endlich oft wiederholte Anwendung von zwei Operationen erzeugen lassen: Projektion auf weniger Dimensionen und Übergang zur Komplementärmenge. Die gewöhnliche Methode, die Projektivität von Mengen nachzuweisen, beruht darauf, daß bei der Definition von Mengen durch gegebene projektive mit Hilfe der logischen Operationen immer wieder projektive entstehen. Diese Methode versagt bei gewissen singulären Mengen, deren Existenz man nachweist, ohne daß man ein individuelles, wohldefiniertes Beispiel angeben kann. Z. B. gilt das für die Vitalischen Mengen. Eine Vitalische Menge ist eine Menge von reellen Zahlen, derart, daß die Differenz zweier Elemente immer irrational ist und daß man andererseits zu jeder reellen Zahl eine rationale Zahl addieren kann, so daß ein Element der Menge entsteht. Die Existenz einer derartigen Menge kann nur mit Hilfe des Auswahlaxioms begründet werden. Nun ist nach einem Satz von Gödel nicht nur die Kontinuums-hypothese mit den mengentheoretischen Axiomen verträglich (falls diese unter sich keinen Widerspruch ergeben), sondern auch die verschärfte Annahme (H) , daß eine Relation $x < y$ existiert, die die Menge der reellen Zahlen im Intervall $(0,1)$ in eine transfinite Folge vom Typ Ω ordnet, und zwar derart, daß die Menge der geordneten Paare (x, y) , für die $x < y$, projektiv ist. Unter Voraussetzung der Richtigkeit von (H) kann dann Verf. die Existenz einer projektiven Vitalischen Menge zeigen. Das Resultat ist besser so zu interpretieren, daß es nicht möglich ist, nachzuweisen, daß alle Vitalischen Mengen nicht projektiv sind. Entsprechendes ergibt sich für andere Mengen von ähnlichem Charakter, bei deren Existenznachweis das Auswahlaxiom oder die transfinite Induktion entscheidend ist. *Ackermann.*

Ljapunov, A. A.: Neue Definition einiger Klassen von Mengen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, II. s. **59**, 847—848 (1948) [Russisch].

Verf. gibt — unter Skizzierung von Beweisen — an, wie die von ihm und anderen definierten A -, C -, R -Mengen mittels der von ihm eingeführten T -Operationen (mit konstanter Basis) charakterisiert werden können. Diese T -Operationen sind, wie folgt, definiert: Sei $\mathfrak{R} = \{N_n\}$ eine Folge von Mengen von Ketten natürlicher Zahlen, E_n eine Folge willkürlicher Mengen. Wenn für jedes n gesetzt wird

$E_n^0 = E_n$, $E_n^{\alpha+1} = E_n^\alpha \Phi_{N_n}(E_n^\alpha)$, ferner $E_n^\gamma = \prod_{\beta < \gamma} E_n^\beta$, falls γ Limes-Zahl, dann ist $T_{\mathfrak{N}}(\{E_n\}) = \prod_{\alpha < \Omega} E_1^\alpha$. — Es wird gezeigt, daß solche T -Operationen als R -Operationen darstellbar sind. — Eine T -Operation mit konstanter Basis wird mit $T(B)$ bzw. $T(A)$ bezeichnet, wenn alle Mengen N_n B - bzw. A -Mengen sind, und mit $T(\bar{B})$, $T(\bar{A})$, wenn die Klasse der B - bzw. A -Mengen gegenüber allen Operationen Φ_{N_n} invariant ist. Es gelten dann folgende Sätze: Die Klasse der A -Mengen besteht aus allen Mengen, welche aus den Intervallen mittels der Operationen $T(B)$ oder $T(\bar{B})$ gewonnen werden können; sie ist invariant gegenüber den Operationen $T(A)$ und $T(\bar{A})$. — Die Klasse der C -Mengen ist die kleinste, welche alle Intervalle enthält und invariant ist in bezug auf die Operationen der Komplementbildung und die Operationen eines der Typen $T(B)$, $T(\bar{B})$, $T(A)$, $T(\bar{A})$. — Analog wird die Klasse der R -Mengen charakterisiert als die kleinste, welche alle Intervalle enthält und invariant ist gegenüber gewissen T -Operationen. Neumer (Mainz).

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

● Chandratreya, G. L. and L. V. Gurjar: Calculus. Poona 2: Ideal Book Services, 1948. VI, 313 p. Rs. 5.

Rodríguez-Salinas, Baltasar: Die Vertauschung in der Reihenfolge der Differentiation. Rev. Acad. Ci. exact físic. natur. Madrid 42, 37—70 (1948) [Spanisch].

Die Arbeit gibt einen Einblick in die verschiedenen Sätze und Begriffsbildungen, welche bei der Frage nach der Vertauschbarkeit in der Reihenfolge der Differentiation eine Rolle spielen. Nach einer einführenden Bemerkung über die Vertauschbarkeit von zwei Grenzübergängen im allgemeinen wird in Verbindung mit einer Verallgemeinerung des Rolleschen Mittelwertsatzes, in der an Stelle der Ableitung die untere und obere Derivierte treten, das folgende Theorem bewiesen: In einer Umgebung der Stelle (x_0, y_0) erfülle $f(x, y)$ die folgenden Bedingungen: 1. $f(x, y)$ ist stetig bezüglich x ; 2. es existiert f_x auf den Geraden $x = x_0$ und $y = y_0$, ferner f_y auf der Geraden $y = y_0$; 3. die untere und obere Derivierte $f_x(x, y)$ und $\bar{f}_x(x, y)$ sind endlich und stetig bezüglich y für alle $x \neq x_0$; 4. für $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ sei $\liminf f_{xy} \geq \limsup f_{x\bar{y}}$. Alsdann sind $f_{xy}(x_0, y_0)$ und $f_{yx}(x_0, y_0)$ vorhanden und gleich. Die Schwarzsche und andere bekannte Bedingungen für die Vertauschbarkeit ordnen sich den obigen Bedingungen unter. Hieran anschließend gewinnt Verf. einen Satz von J. Martínez Salas [Funciones de n variables reales de variación acotada y su derivación, Rev. mat. Hisp.-Amer. (4) 6, 25—42, 217—221, 249—253 (1946)], wonach bei Funktionen $f(x, y)$ beschränkter (2-dimensionaler) Variation fast überall, d. h. überall bis auf eine L-Nullmenge, die zwei gemischten partiellen Ableitungen existieren und einander gleich sind. Dasselbe gilt auch für Funktionen $f(x, y)$, für die f_x und f_{yx} in einer offenen Punktmenge als Definitionsbereich von f existieren. In Anlehnung an Ostrowski [Comment. math. Helvetici 15, 222—226 (1943)] verwendet Verf. den Begriff der uniformen Ableitung und beweist dann den Satz von Ostrowski, wonach die Uniformität von f_{xy} und f_{yx} für die Gleichheit dieser Ableitungen hinreicht, sowie eine Verallgemeinerung hiervon, ferner den Satz von Heffter-Young, in welchem die (2-dimensionale) Differenzierbarkeit der Funktionen f_x und f_y im Punkt (x_0, y_0) als hinreichende Bedingung für $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ auftritt. In diesem Zusammenhang benützt Verf. eine dem Begriff der „stetigen Konvergenz“ verwandte Limesbildung wie

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k))/h.$$

Auch die Integrationstheorie wird als Beweismittel herangezogen, wobei sich leichte Varianten in den hinreichenden Bedingungen ergeben. Die Arbeit schließt mit

einem Vertauschbarkeitssatz bei gewissen Funktionalen und bei der Differentiation beliebiger reeller Ordnung. *Aumann* (Regensburg).

Sargent, W. L. C.: On the integrability of a product. *J. London math. Soc.* **23**, 28—34 (1948).

Falls $f(x)$ in (a, b) im Denjoy-Perronschen Sinne integrierbar ist, so hat man für die Integrierbarkeit des Produktes $f(x)k(x)$ im nämlichen Sinn die hinreichende Bedingung, daß $k(x)$ in $[a, b]$ mit einer Funktion von beschränkter Schwankung äquivalent ist. Verf. ergänzt dieses bekannte Theorem, indem er nachweist, daß die oben für $k(x)$ formulierte Bedingung auch notwendig ist. Er beweist genauer sogar den weitergehenden Satz: Ist $k(x)$ nicht mit einer Funktion beschränkter Schwankung in $[a, b]$ äquivalent, so gibt es eine Cauchy-integrierbare Funktion $f(x)$, so daß $f(x)k(x)$ nicht im Cesaro-Perronschen Sinne beliebiger Ordnung — und auch nicht im Denjoyschen Sinne — in (a, b) integrierbar ist. *H. Hadwiger*.

Young, L. C.: On area and length. *Fundam. Math.*, Warszawa **35**, 275—302 (1948).

(A) Es sei E_n ein n -dimensionaler kartesischer Raum und $M(X)|E_n$ eine eindeutige Funktion, deren Werte Kardinalzahlen sind, wobei die nicht endlichen Kardinalzahlen sämtlich identifiziert werden; man sagt, durch $M(X)$ werde ein multiples („multiple“) System M definiert, dessen multiple Funktion eben $M(X)$ ist. Falls $M(X)$ nur die Werte Null und Eins annimmt, ist $M(X)$ die charakteristische Funktion einer Punktmenge $\mathfrak{M} \subset E_n$, und es werde M mit \mathfrak{M} identifiziert. (Summe und Produkt multipler Systeme wird durch Addition und Multiplikation der zugehörigen multiplen Funktionen erklärt, wobei ein Produkt immer Null sein soll, sofern nur einer der Faktoren Null ist). Ist \mathfrak{x} ein σ -Körper von Mengen in E_n , so werde als multiple Erweiterung von \mathfrak{x} bezeichnet die Klasse aller multiplen Systeme M derart, daß für jedes j ($j = 1, 2, \dots$) in \mathfrak{x} enthalten ist die Menge $\mathfrak{M}_j = [M(X) \geq j]$ aller $X \in E_n$ mit $M(X) \geq j$. Ist \mathfrak{f} ein σ -Körper in E_n und $\mu(\mathfrak{M})|\mathfrak{f}$ ein Maß, so erklärt man die Erweiterung von $\mu|\mathfrak{f}$ für multiple Systeme M durch $\mu(M) = \sum \mu(\mathfrak{M}_j)$. Für das Folgende sind nachstehende multiple Systeme von Bedeutung: (I) Es sei $f(w)$ eine eindeutige stetige Abbildung einer (absoluten) F_σ -Menge $\mathfrak{B}_0 \subset E_2$ (d. h. einer Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Teile von E_2) in den E_n ; es sei ferner $M(X; f; \mathfrak{B}) = M(X; \mathfrak{B})$ die obere Grenze der Mächtigkeiten aller Systeme aus endlich vielen Punkten $w \in \mathfrak{B}$ mit $X = f(w)$ und M bzw. $M_{\mathfrak{B}}$ das zu $M(X; \mathfrak{B}_0)$ bzw. zu $M(X; \mathfrak{B})$ gehörige multiple System. Man bezeichnet dann M bzw. $M_{\mathfrak{B}}$ als das Banach-System und $M(X; \mathfrak{B}_0)$ bzw. $M(X; \mathfrak{B})$ als die Banach-Funktion von $f(w)$ in \mathfrak{B}_0 bzw. in \mathfrak{B} . Es ist $M(X; \mathfrak{B}_0)$ Borelmeßbar. Weiter sei $\mu(\mathfrak{M})$ ein Carathéodory-Maß für $\mathfrak{M} \subset E_n$, ferner sei \mathfrak{B}_1 eine Borelsche Teilmenge von \mathfrak{B}_0 und $\mathfrak{M}' = [M(X; \mathfrak{B}_1) = +\infty]$; wenn dann $\mu(\mathfrak{M}') = 0$, so ist $M(X; \mathfrak{B})$ μ -meßbar für jedes Borelsche $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_1$ und $\mu(M_{\mathfrak{B}})$ ist absolut additiv als Funktion von \mathfrak{B} . — (II) Es sei nun spezieller \mathfrak{B}_0 beschränkt und abgeschlossen. An Stelle des Punktes soll jetzt als Element treten jede in \mathfrak{B}_0 enthaltene Komponente einer Menge $[f(w) = \text{konst.}]$; als Vollmenge \mathfrak{B} werde jedes $\mathfrak{B} \subset E_2$ bezeichnet, für welches $\mathfrak{B} \mathfrak{B}_0$ Vereinigung von Elementen ist. Jedes Element ist entweder einpunktig oder (maximales) Kontinuum. (Die Einführung des Begriffes „Element“ kommt für das Folgende auf die Identifizierung aller der gleichen Komponente von $[f(w) = \text{konst.}]$ angehörigen Punkte hinaus.) Es sei nun $K(X)$ ein System von endlich vielen Elementen, die zu \mathfrak{B} nicht fremd sind und für deren Punkte $f(w) = X$ ist mit dem gleichen festen X . Als Morrey-Funktion $M^*(X; \mathfrak{B})$ von $f(w)$ in \mathfrak{B} wird bezeichnet die obere Grenze der Mächtigkeiten aller $K(X)$; das zu $M^*(X; \mathfrak{B})$ gehörige multiple System $M_{\mathfrak{B}}^*$ heiße Morrey-System. Es ist $M^*(X; \mathfrak{B}_0)$ Borelmeßbar. Weiter sei \mathfrak{w} der kleinste im System aller Vollmengen enthaltene σ -Körper, in dem alle Vollmengen enthalten sind, die F_σ -Mengen sind. Ist dann $\mu(\mathfrak{M})$ ein

Carathéodory-Maß im E_n und ist $\mu(M^*) < +\infty$, dann ist $M^*(X; \mathfrak{B})$ μ -meßbar für jedes $\mathfrak{B} \in \mathfrak{w}$, und $\mu(M_{\mathfrak{B}}^*)$ ist absolut additiv als Funktion von \mathfrak{B} über \mathfrak{w} . — Wir bezeichnen mit $\mu^k(M)$ die multiple Erweiterung des k -dim. Carathéodoryschen Maßes in E_n . Ist \mathfrak{B}_0 eine Strecke, so ist $\mu^1(M) = \mu^1(M^*)$ und gleich der Länge im klassischen Sinne des Bildes von \mathfrak{B}_0 . Ist $f(w)$ eine Lipschitz-Funktion, so gilt $\mu^2(M) = \mu^2(M^*)$, und für Borelsche $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_0$ ist $\mu^2(M_{\mathfrak{B}})$ gleich dem klassischen Integral. Allgemein ist für $\mu(M) < +\infty$ auch $\mu(M) = \mu(M^*)$. (III) Die Einführung noch anderer multipler Systeme ist bedingt durch das Auftreten von Aufgaben der folgenden Art: Man habe eine offene Kreisscheibe \mathfrak{R} , aus der ein Radius r weggenommen ist; die Länge der Begrenzung von $(\mathfrak{R} - r)$, aufgefaßt als geschlossene Kurve, ist dann gleich der Summe aus der Länge p der Peripherie \mathfrak{P} von \mathfrak{R} und der doppelten Länge r von r (während die Länge von $\mathfrak{P} \cup r$ gleich $p + r$ ist). In den demgemäß zu definierenden Systemen sind die Elemente weder Punkte noch maximale Konstanzkontinua [wie in (I) bzw. (II)], sondern Primenden. Des Näheren sei also \mathfrak{B}_0 jetzt ein (beschränktes) Kontinuum. Vorausgesetzt wird, daß es in der komplexen w -Ebene mindestens ein (einfach zusammenhängendes) Komplementärgebiet \mathfrak{D} von \mathfrak{B}_0 gibt derart, daß die (in \mathfrak{B}_0) stetige Funktion $f(w)$ konstant ist auf jedem Primende von \mathfrak{D} . Es sei dann $N(X; \mathfrak{D})$ die Anzahl der Primenden von \mathfrak{D} , auf denen $f(w) = X$ ist; das zugehörige multiple System $N(\mathfrak{D})$ heiße Randwertsystem von f für \mathfrak{D} . Bei konformer Abbildung von \mathfrak{D} auf $|z| < 1$ bezeichne $g(z)$ den Wert von $f(w)$ in demjenigen Primende von \mathfrak{D} , welches z entspricht; dann ist $g(z)$ stetig für $|z| = 1$, ferner ist $N(X; \mathfrak{D})$ die Banach-Funktion des Banach-Systems von $g(z)$ in $|z| = 1$. Es ist $N(X; \mathfrak{D})$ Borelmeßbar. Ist ferner $\mathfrak{B}_n(\mathfrak{D})$ bzw. \mathfrak{B}_n die Vereinigung aller Elemente von \mathfrak{B}_0 , welche zu mindestens n Primenden von \mathfrak{D} nicht fremd sind bzw. nicht fremd zu mindestens n Primenden irgendwelcher (derartiger) \mathfrak{D} , so gilt $N(X; \mathfrak{D}) = M^*(X; \mathfrak{B}_1(\mathfrak{D})) + M^*(X; \mathfrak{B}_2(\mathfrak{D}))$ und $\sum_{\mathfrak{D}} N(X; \mathfrak{D}) = M^*(X; \mathfrak{B}_1) + M^*(X; \mathfrak{B}_2)$, und alle hierbei auftretenden Funktionen sind Borelmeßbar. — (B) Unter Bezugnahme auf (A) (II) erklärt man als (intrinsische) Länge L^* bzw. Fläche F^* eines stetigen Bildes von \mathfrak{B}_0 bzw. \mathfrak{B} das 1- bzw. 2-dimensionale Maß des zu $M^*(X; \mathfrak{B}_0)$ bzw. zu $M^*(X; \mathfrak{B})$ gehörigen Morrey-Systems. Mit Hilfe von (A) (III) wird weiter erklärt: Es sei S_0 das gegebene stetige Bild von \mathfrak{B}_0 . Ist S Bild einer die Begrenzung von \mathfrak{D} enthaltenden Vollmenge \mathfrak{B} , die in \mathfrak{B}_0 enthalten ist, und ist $L^*(S) < +\infty$ für mindestens ein solches S , so wird $\mu^1(N(\mathfrak{D})) = L_{fr}(\mathfrak{D})$ als Randlänge von S_0 in \mathfrak{D} bezeichnet [für $L^*(S) < +\infty$ ist, wie gezeigt wird, $f(w) = \text{konst.}$ auf jedem Primende von \mathfrak{D}]. Es gilt dann $\sum_{\mathfrak{D}} L_{fr}(\mathfrak{D}) \leq 2 L^*(S)$, die Summe linker Hand erstreckt über beliebig viele derartige \mathfrak{D} . — Außerdem enthält die Arbeit eine Reihe von Anwendungen und Bemerkungen zu den eingeführten Längen- und Flächenmaßen. *Haupt.*

Helsel, R. G. and E. J. Mickle: The Kolmogoroff principle for the Lebesgue area. Bull. Amer. math. Soc. 54, 235—238 (1948).

Eines der Axiome der Kolmogoroffschen Maßtheorie fordert, daß bei dehnungsloser Abbildung das Maß nicht zunimmt. In vorliegender Note wird gezeigt, daß dieses Axiom für das Lebesguesche Oberflächenmaß (im nachstehenden Sinne) erfüllt ist. Im einzelnen wird bewiesen: Es sei R der 3-dimensionale euklidische Raum der Punkte $\eta = \eta(x_1, x_2, x_3)$. Erstens: Sind T^* : $\eta = \eta^*(u, v)$ und T : $\xi = \xi(u, v)$ beschränkte Abbildungen der abgeschlossenen Kreisscheibe K : $u^2 + v^2 \leq 1$ in R derart, daß $|\eta^*(u_1, v_1) - \eta^*(u_2, v_2)| \leq |\xi(u_1, v_1) - \xi(u_2, v_2)|$ für beliebige $(u_j, v_j) \in K$, $j = 1, 2$, so existiert eine in R erklärte dehnungslose Abbildung (d. h. Lipschitz-Abbildung mit Dehnungsschranke 1) L : $\zeta = \zeta(x_1, x_2, x_3)$, für welche $T^* = LT$ in K . — Zweitens: Sind T^* und T in Erstens sogar stetig, dann ist $A(T^*) \leq A(T)$, wenn $A(T)$ bzw. $A(T)^*$ das Lebesguesche Flächenmaß der durch T bzw. T^* bestimmten (Fréchet)-Oberfläche bezeichnet. *Haupt.*

Andersen, Erik Sparre and Børge Jessen: Some limit theorems on set-functions. Danske Vid. Selsk., mat.-fysiske Medd. **25**, Nr. 5, 8 S. (1948).

In einer vorausgehenden Arbeit [Danske Vid. Selsk., mat.-fysiske Medd. **22**, Nr. 14 (1946)] haben Verff. zwei Limesätze betreffend Integrale in abstrakten Mengen bewiesen, nämlich: 1. Es bezeichne \mathfrak{F} ein Borelsches System, $E \in \mathfrak{F}$ und $\mu(E) = 1$, wobei μ ein in \mathfrak{F} erklärtes Maß ist. Ferner sei $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \dots$ eine aufsteigende Folge Borelscher Teilsysteme von \mathfrak{F} und $E \in \mathfrak{F}$. Weiter sei φ eine beschränkte, volladditive, in \mathfrak{F} definierte Mengenfunktion, welche in jedem \mathfrak{F}_n stetig ist, so daß φ , in jedem \mathfrak{F}_n betrachtet, ein Integral einer in \mathfrak{F}_n meßbaren Funktion f_n ist. Sodann existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ fast überall in E . 2. Eine analoge Aussage bei absteigenden Folgen $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2 \supset \dots$, wobei $E \in \mathfrak{F}_n$ für jedes n gilt. — In der vorliegenden Arbeit gehen die Verff. einleitend auf die Beziehungen ein, welche zwischen den oben erwähnten Limesätzen und einem Theorem von J. L. Doob [Trans. Amer. math. Soc. **47**, 455—486 (1940); dies. Zbl. **23**, 241] bestehen. Sodann beweisen sie zwei Theoreme, welche Verallgemeinerungen der genannten beiden Limesätze sind, insofern nämlich, als nunmehr auf Stetigkeitsvoraussetzungen über die Mengenfunktion φ verzichtet wird. Die kurzen Beweise werden durch diese Erweiterung durchsichtiger. Die neuen Limesätze beziehen sich bei der veränderten Sachlage auf $\underline{f} = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ und $\bar{f} = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$. Diese Limesfunktionen sind Derivierte einer Mengenfunktion, welche beim ersten Theorem bei aufsteigenden Folgen über dem kleinsten Borelsystem, das alle \mathfrak{F}_n enthält, beim zweiten Theorem bei absteigenden Folgen über dem größten Borelsystem, das in allen \mathfrak{F}_n enthalten ist, erklärt ist.

H. Hadwiger (Bern).

Allgemeine Reihenlehre:

Erdős, Paul and George Piranian: A note on transforms of unbounded sequences. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 787—790 (1947).

Sei $A \equiv \|a_{nk}\|$ eine reguläre Toeplitz-Matrix, welche die Folge s_k in die Folge t_n transformiert $\left[t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k \quad (1) \right]$. Das Ziel dieser Arbeit ist die Widerlegung folgender Vermutungen: a) Es existiert eine reguläre Toeplitz-Matrix, welche jede Folge s_k in eine solche t_n transformiert, welche wenigstens einen Limespunkt im Endlichen besitzt. b) Man kann zu jeder regulären Toeplitz-Matrix eine Folge s_k angeben, so daß die transformierte Folge t_n ins Unendliche monoton wächst. — Zur Widerlegung dieser Vermutungen werden folgende Sätze bewiesen: 1. Ist A eine reihen-finite reguläre Toeplitz-Matrix, so existiert eine Folge s_k , so daß die ihr nach (1) entsprechende Folge t_n so beschaffen ist, daß $|t_n|$ mit beliebiger Geschwindigkeit ins Unendliche wächst. — 2. Ist A eine reguläre Toeplitz-Matrix, so kann man eine Folge s_k so angeben, daß die ihr entsprechende Folge t_n keinen Limespunkt in der endlichen Ebene besitzt. — 2a) Zur beliebigen regulären Toeplitz-Matrix A existiert eine solche Folge s_k , daß, wenn $t_n = \varrho_n e^{i\theta_n}$ gilt, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$ ist. Ist A reell, so kann man die Folge s_k so angeben, daß t_n auch reell und positiv sei. — 3. Ist $f(n)$ eine beliebige reelle Funktion mit der Eigenschaft: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$, so existiert eine reguläre Toeplitz-Matrix, welche jede Folge s_k in eine solche transformiert, welche der Ungleichung $|t_n| < f(n)$ genügt ($n > N$). — 4. Es läßt sich eine reguläre Toeplitz-Matrix konstruieren, welche die beliebige Folge s_k in eine solche transformiert, für welche $|t_n|$ nicht monoton wächst. St. Fenyő.

Lorenz, G. G.: A contribution to the theory of divergent sequences. Acta math. Uppsala 80, 167—190 (1948).

Eine beschränkte Folge x_n heißt fastkonvergent und $s = \text{Lim } x_n$ heißt der F -Limes von x_n , wenn für jeden Banachschen verallgemeinerten Limesbegriff L (vgl. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932, 33—34; dies. Zbl. 5, 209) gilt: $L(x_n) = s$. Gleichwertig ist: x_n ist fastkonvergent gegen s , wenn $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+p-1}}{p} = s$ gleichmäßig in n . Dieses Limitierungsverfahren F wird eingehend untersucht. Eine Taubersche Bedingung ist eine Bedingung für die a_n , so daß aus der Fastkonvergenz von $\sum a_n$ auf die gewöhnliche Konvergenz von $\sum a_n$ geschlossen werden kann. Es gilt: $a_n = O(c_n)$, $c_n \geq 0$, ist dann und nur dann eine Taubersche Bedingung, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge n_v mit $n_{v+1} - n_v \rightarrow \infty$ existiert mit $c_n < \varepsilon$ für $n \neq n_v$, $v = 1, 2, \dots$. $a_n \leq O(c_n)$ ist dann und nur dann eine Taubersche Bedingung, wenn $c_n \rightarrow 0$. Ein reguläres Matrixverfahren mit der Matrix A ist dann und nur dann stark regulär, d. h. summiert jede fastkonstante Folge zu ihrem $\text{Lim } x_n$, wenn

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n} - a_{m,n+1}| = 0$$

ist. Jede stark reguläre Matrix A summiert jedoch auch noch nicht fastkonvergente Folgen, so daß des F -Verfahren nicht durch eine Matrix erzeugt werden kann. Es wird sogar gezeigt, daß dieses Verfahren auch nicht durch ein unendliches Produkt oder eine unendliche Summe von Matrixverfahren erzeugt werden kann. Ein weiterer Satz über Limitierungsverfahren wird abgeleitet: Eine Folge n_1, n_2, \dots hat eine Dichte $\leq \Omega(n)$, wenn es höchstens $\Omega(n)$ Glieder $n_v \leq n$ gibt. A sei regulär; die Bedingung $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_n |a_{m,n}| = 0$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß es eine ganzzahlige, monoton gegen $+\infty$ wachsende Funktion $\Omega(n)$ gibt, so daß jede beschränkte Folge x_n , deren $x_{n_v} \neq 0$ eine Indizesfolge der Dichte $\leq \Omega(n)$ bilden, A -summierbar gegen 0 ist. G. Köthe (Mainz).

Basu, S. K.: On the total relative strength of the Riesz and Cesàro methods. J. London math. Soc. 24, 51—59 (1947).

Für $x \geq 0$ sind das Cesàro-Verfahren (C, x) und das Riesz-Verfahren (R, n, x) äquivalent. Bezüglich der Summierbarkeit zu $+\infty$ gilt jedoch, daß 1. die (C, x) -Summierbarkeit nur für ganzzahliges $x \geq 0$ die (R, n, x) -Summierbarkeit impliziert und 2. die (R, n, x) -Summierbarkeit nur für $0 \leq n \leq 1$ die (C, x) -Summierbarkeit impliziert. Der Beweis benutzt ähnliche Sätze von Kuttner [Proc. London math. Soc., II. s. 45, 398—409 (1939)] über das Positivsein der (C, x) - und (R, n, x) -Partialsummen. Lorenzen (Bonn).

Rajagopal, C. T.: On some extensions of Ananda Rau's converse of Abels theorem. J. London math. Soc. 23, 38—44 (1948).

Es sei $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$, $f(s) = \sum_0^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ konvergent für $s > 0$ und $A(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} a_n$. Aus (1) $f(s) \rightarrow S$ für $s \rightarrow +0$, (2) $a_n = O((\lambda_n - \lambda_{n-1})/\lambda_n)$ und (3) $\lambda_n/\lambda_{n-1} \rightarrow 1$ folgt $A(\lambda_n) \rightarrow S$ für $n \rightarrow \infty$ [J. E. Littlewood, Proc. London math. Soc., II. s. 9, 434—448 (1911)]. Dies ist auch richtig, wenn (3) weggelassen wird [K. Ananda Rau, J. London math. Soc. 3, 200—205 (1928)]. Ferner kann (2) ersetzt werden durch

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max_{\lambda_n < \lambda_m < (1+\delta)\lambda_n} |a_{n+1} + \dots + a_m| \rightarrow 0 \quad \text{für } \delta \rightarrow +0$$

[vgl. L. S. Bosanquet, J. London math. Soc. 19, 161—168 (1944)]. Dazu macht Verf. verschiedene Bemerkungen, die Spezialisierungen, Verallgemeinerungen und Beweismethode betreffen. Z. B. läßt der in Rede stehende Satz eine einseitige

Formulierung zu: (F) Aus (1),

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > -\infty \quad \text{und} \quad (5) \lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{\lambda_n < \lambda_m < (1+\delta)\lambda_n} (a_{n+1} + \dots + a_m) \geq 0$$

folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} A(\lambda_n) = S$. (F) ist enthalten in dem folgenden Satz (G): Es gebe positive Konstanten δ und B , so daß (für $n \geq 0$)

$$\min_{\lambda_n \leq \lambda_m < (1+\delta)\lambda_n} (a_n + \dots + a_m) \geq -B \quad \text{und} \quad \lim_{\eta \rightarrow +0} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \min_{\lambda_{n_r} < \lambda_m < (1+\eta)\lambda_{n_r}} (a_{n_r+1} + \dots + a_m) \geq -\tau$$

für eine Konstante $\tau \geq 0$ und eine gegen $+\infty$ wachsende Folge n_r natürlicher Zahlen; aus (1) folgt dann $\lim_{r \rightarrow \infty} A(\lambda_{n_r}) \leq S + \tau$. Es wird gezeigt, wie man (G)

aus Sätzen von O. Szász [Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. **1930**, 315—333; Trans. Amer. math. Soc. **39**, 117—130 (1936); dies. Zbl. **13**, 262] gewinnen kann, ferner wird (4) in (F) verallgemeinert. Verf. weist auch hin auf einen (G) enthaltenden Satz von G. Ricci [Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. s. **13**, 287—308 (1935); dies. Zbl. **11**, 15].

Meyer-König (Stuttgart).

Zorn, Max A.: Note on power series. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 791—792 (1947).

Aus der Potenzreihe $\sum \alpha_{ik} \xi^i \eta^k$ entstehe durch Substitution konvergenter Potenzreihen $\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \zeta^i$ und $\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \zeta^i$ und formales Zusammenfassen nach Potenzen von ζ stets eine konvergente Potenzreihe in ζ . Ist dann $\sum \alpha_{ik} \xi^i \eta^k$ konvergent? Diese nach Verf. von Bochner aufgeworfene Frage wird bejahend beantwortet für den Fall, daß die Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i, \alpha_{ik}$ komplexe Zahlen sind. Es wird nämlich gezeigt: Erzeugt jede Substitution $\xi = \alpha \zeta, \eta = \beta \zeta$ aus der Reihe $\sum \alpha_{ik} \xi^i \eta^k$ eine Potenzreihe in ζ von nicht verschwindendem Konvergenzradius ($\alpha, \beta, \alpha_{ik}$ komplex), so ist $\sum |\alpha_{ik} \xi^i \eta^k|$ für hinreichend kleine Werte von $|\xi|$ und $|\eta|$ konvergent. Beim Beweis wird in einem geeigneten vollständigen metrischen Raum gearbeitet.

Meyer-König (Stuttgart).

Bosanquet, L. S.: On convergence and summability factors in a Dirichlet series. II. J. London math. Soc. **23**, 35—38 (1948).

Als Erweiterung seiner früheren Resultate [s. dies. Zbl. **30**, 149] beweist Verf.:

1. Bei einer Dirichletschen Reihe $\sum a_n l_n^s$ kann die Abszisse für $|R, l, \kappa + 1|$ -Summabilität jene für (R, l, κ) -Summabilität nicht übersteigen. — 2. Ist das

Integral $\int_0^{\infty} a(u) du$ (C, κ) -summierbar, so ist das Integral $\int_0^{\infty} u^{-\delta} \cdot a(u) du$ ($\delta > 0$) $|C, \kappa + 1|$ -summierbar. Beide Resultate sind im folgenden enthalten: Ist $\kappa \geq 0$,

$p > -\kappa, \delta > 0$ und $\int_1^x d\Phi(u) = O(x^p)$ (C, κ) für $x \rightarrow \infty$, so ist $\int_1^{\infty} u^{-p-\delta} \cdot d\Phi(u)$ $|C, \kappa + 1|$ -summierbar.

Pfluger (Zürich).

Muracchini, Luigi: Su alcune proprietà di particolari serie doppie. Boll. Un. mat. Ital., III. s. **3**, 228—236 (1948).

Verf. untersucht das Konvergenzverhalten der Doppelreihe $\sum_{m,n \geq 0} \frac{a_{m,n}}{m^s + n^t}$,

wo die $a_{m,n}$ gegebene komplexe Zahlen, s und t komplexe Variable sind. Es ergeben sich gewisse Analogien zum Konvergenzverhalten der gewöhnlichen Dirichletschen Reihen.

Pfluger (Zürich).

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Mikusiński, Jan G.: Sur les fonctions

$$k_n(x) = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{x^{n+kv}}{(n+kv)!} \quad (k = 1, 2, \dots; n = 0, 1, \dots, k-1).$$

Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 46—51 (1948).

Für $k = 1, 2, \dots; n = 0, \dots, k-1$ seien die Anfangswerte

$$(1) \quad \left. \frac{d^r y}{dx^r} \right|_{x=0} = \begin{cases} 1 & r = n \\ 0 & r \neq n \end{cases}$$

zur Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{d^k y}{dx^k} + y = 0$$

gegeben. Bei festem k wird durch

$$(3) \quad y = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v x^{n+kv}}{(n+kv)!} = k_n(x)$$

ein Fundamentalsystem zu (1), (2) geliefert. Die k -Tupel der in x ganzen Funktionen y lassen als Exponentialpolynome bemerkenswert einfache Additionstheoreme zu; für $k = 3$ gilt z. B.

$$3_0(x+y) = 3_0(x) 3_0(y) - 3_1(x) 3_2(y) - 3_2(x) 3_1(y),$$

$$3_1(x+y) = 3_0(x) 3_1(y) + 3_1(x) 3_0(y) - 3_2(x) 3_2(y),$$

$$3_2(x+y) = 3_0(x) 3_2(y) + 3_1(x) 3_1(y) + 3_2(x) 3_0(y).$$

Ist $k_n(\xi) = 0$, so wird das asymptotische Verhalten der Nullstellen verfolgt einmal für $\xi \rightarrow \infty$, sodann auch für $k \rightarrow \infty$. Bezeichnet $\xi = \xi_{k,n}$ die kleinste positive Nullstelle der Funktion (3), so bleibt z. B. $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \xi_{k,n} = e^{-1}$. *Maier* (Jena).

Krall, H. L. and Orrin Frink: A new class of orthogonal polynomials: The Bessel polynomials. Trans. Amer. math. Soc. **35**, 100—115 (1949).

Die Verf. untersuchen die Polynomlösungen der Differentialgleichung

$$x^2 y'' + (ax + b) y' = n(n + a - 1) y$$

und teilen u. a. Rekursionsformeln, eine Darstellung als n -te Ableitung und eine Orthogonalitätsbeziehung mit. Im Spezialfall $a = b = 2$ ist z. B.

$$y_{n+1} = (2n+1) x y_n + y_{n-1}, \quad \int_U y_m y_n e^{-2/x} dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Der Integrationsweg U umkreist den Nullpunkt. — Die Bezeichnung „Bessel-Polynome“ rührt von der Darstellung

$$y_n(1/iz) = \sqrt{\pi/2} z e^{iz} (i^{-n-1} J_{n+\frac{1}{2}}(z) + i^n J_{-n-\frac{1}{2}}(z))$$

her. Ref. bemerkt, daß sich aus dieser Formel eine sehr enge Beziehung der hier behandelten (speziellen) Bessel-Polynome mit einer von Hadwiger [Jber. deutsche Math.-Verein. **57**, 35—42 (1937); dies. Zbl. **16**, 251] untersuchten Polynomklasse ergibt. *W. Hahn* (Berlin).

Kuznecov, P. I.: Lommelsche Funktionen von zwei imaginären Argumenten. Priklad Mat. Mech., Moskva **11**, 555—560 (1947) [Russisch].

Für die Funktionen $Y_n(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (w/z)^{n+2m} J_{n+2m}(iz)$ (J_{n+2m} = Bessel-Funktion) und $\Theta_n(w, z) = Y_n(z^2/w, z)$ werden einige Beziehungen zusammengestellt. In Tabellen werden die Funktionen $Y_1, Y_2, \Theta_0, \Theta_1$ für $w = 0, 1, \dots, 6$, $z = 0, 1, \dots, 6$ auf meist 6 Dezimalen angegeben. Dann wird mittels dieser Funktionen das Rand- und Anfangswertproblem für die Leitungsgleichungen

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = R J + L \frac{\partial J}{\partial x}, \quad -\frac{\partial J}{\partial x} = G V + C \frac{\partial V}{\partial t},$$

$V(x, 0) = J(x, 0) = 0, \quad V(0, t) = 1$ (V = Spannung, J = Strom, R, L, G, C = konstante Koeffizienten) gelöst. *J. Meixner* (Aachen).

Rutgers, J. G.: Verallgemeinerung einiger Identitäten. I. II. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 868—873, 996—1004 (1948) [Holländisch].

Ausgehend von den Funktionen $S_{\nu,k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+\nu)^k J_{\nu+2n}(x)$ [$J_{\nu+2n}(x)$ = Bessel-Funktion] werden Identitäten wie

$$\sum_{p=0}^s \frac{(-1)^p (2p+2)^{2k+2}}{(s-p)! (s+p+2)!} \\ = (-1)^s 2^{2s+1} \sum_{p_1=0}^{k-s} \binom{2k+1}{2p_1+2s+1} \sum_{p_2=0}^{p_1} \binom{2p_1+2s}{2p_2+2s} \cdots \sum_{p_{2s+1}=0}^{p_{2s}} \binom{2p_{2s}+1}{2p_{2s+1}+1}$$

(k ganz ≥ 0) und allgemeinere Identitäten dieser Art für

$$\sum_{p=0}^s \frac{(\pm 1)^p (2p+\nu)^k}{(s-p)! \Gamma(s+p+\nu+1)}$$

mit willkürlichem ν und geradem $k > 0$, im Falle $(-1)^p$ auch für ungerade $k > 0$ abgeleitet. J. Meixner (Aachen).

Kline, Morris: Some Bessel equations and their application to guide and cavity theory. J. Math. Physics, Massachusetts 27, 37—48 (1948).

Es wird gezeigt, daß zwischen den stetigen Lösungen $x_{nm}(\varrho)$ von

$$J_n(x) N_n(\varrho x) - J_n(\varrho x) N_n(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad J_n(x) N'_n(\varrho x) - J'_n(\varrho x) N_n(x) = 0$$

($n = 0, 1, 2, \dots$) und den Nullstellen s_{nm} von $J_n(x)$ bzw. $J'_n(x)$ eine eindeutige Zuordnung möglich ist und daß bei geeigneter Numerierung $x_{nm}(\varrho) \rightarrow s_{nm}$ für $\varrho \rightarrow 0$. Daraus folgt, daß die verschiedenen Wellentypen in einem aus zwei koaxialen Kreiszylindern bestehenden Hohlleiter in die entsprechenden Wellentypen des kreiszylindrischen Hohlleiters stetig übergehen, wenn das Radienverhältnis ϱ der koaxialen Kreiszylinder gegen Null geht. Ein entsprechendes Ergebnis gilt für die Eigenschwingungen in Hohlräumen. J. Meixner (Aachen).

Abramowitz, Milton: Bessel function expansions of certain Coulomb wave functions. J. Math. Physics, Massachusetts 27, 157—158 (1948).

Für die in $\varrho = 0$ reguläre Lösung der Differentialgleichung $d^2 y/d\varrho^2 + (1 - 2\eta\varrho^{-1})y = 0$ wird eine Reihenentwicklung

$$y = \sum a_n(\eta) J_n(\varrho) \quad \text{bzw.} \quad y = \sum b_n(\eta) i^{-n} J_n(i\varrho)$$

angesetzt. Die Koeffizienten a_n bzw. b_n genügen einem drei- bzw. fünfgliedrigen Rekursionssystem. Diese Reihen konvergieren schneller als die bekannten Potenzreihen für $\eta(\varrho)$. J. Meixner (Aachen).

Funktionentheorie:

• Saks, Stanislaw und Antoni Zygmund: Analytische Funktionen. 2. unveränderte Aufl. (Math. Monographien Bd. 10). Warschau u. Breslau: Spółdzielnia Wydawnicza „Czytelnik“ 1948, XI, 431 S. [Polnisch].

Nehari, Zeev: Analytic functions possessing a positive real part. Duke math. J. 15, 1033—1042 (1948).

Verf. behandelt ein Extremalproblem für Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten, das eng verwandt ist mit den von Ahlfors [dies. Zbl. 30, 30] und Ref. [Jber. Deutsche Math. Vereinig. 50, 230—255 (1940); 52, 118—132 (1942); dies. Zbl. 24, 722] untersuchten. — D sei ein n -fach zusammenhängendes Gebiet, das $z = \infty$ enthält; es wird die Klasse der in D regulären und eindeutigen Funktionen $f(z)$ zugrunde gelegt mit $\Re f(z) \geq 0$, $f(\infty) = 1$. Ist $f(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots$ die Entwicklung bei $z = \infty$, so wird nach dem Wertebereich von a_m innerhalb dieser Klasse, oder allgemeiner nach dem der beliebigen Linear-

kombination $\sum_{\mu=1}^m \gamma_{\mu} a_{\mu}$ gefragt. Die Frage wird auf ein anderes Extremalproblem zurückgeführt, nämlich darauf, das kleinste mögliche (reelle) α zu finden, für das

$$i^{-1} \left(q'(z) - \alpha p'(z) + \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} w'_{\nu}(z) \right) \frac{dz}{ds} = i^{-1} r'(z) \frac{dz}{ds}$$

auf dem Rande von D überall nichtnegativ ausfällt; dabei ist $\Re p(z)$ die Green'sche Funktion von D mit Singularität ∞ , $\Re w_{\nu}(z)$ das harmonische Maß der ν -ten Randkomponente, $\Re q(z)$ diejenige in D harmonische Funktion, die sich bei ∞ wie $\Re \gamma z^m$ mit beliebig vorgegebenem komplexem γ verhält und auf dem Rande verschwindet; die λ_{ν} sind frei wählbare, reelle Konstanten; notwendig ist $\alpha > 0$. — Die Funktion $r(z)$ ist analog zu gewissen bei Ahlfors und Ref. durch Anwendung der Multiplikatorenmethode auf die dort betrachteten Extremalprobleme gewonnenen Hilfsfunktionen (wobei die Bedingungen der Eindeutigkeit für die Funktionen der betrachteten Klasse die Rolle der Nebenbedingungen spielen). Doch erörtert Verf. diesen Zusammenhang nicht. Er beweist, daß jeder Randpunkt des Wertevorrats der untersuchten Größe bei einer Funktion erreicht wird, die D auf eine n -blättrige rechte Halbebene abbildet, wobei die Pole von $f(z)$ in Nullstellen von $r'(z)$ fallen. Doch kann nicht behauptet und im Falle $n = 1$ durch Gegenbeispiele widerlegt werden, daß das ursprüngliche Problem nur eine einzige Lösung habe oder daß jede Lösung von dem genannten Typus sei, während die Lösung $r(z)$ des zweiten Problems im wesentlichen einzig ist. — Die Methode erlaubt ohne wesentliche Abänderung die Lösung entsprechender Interpolationsprobleme. *Grunsky.*

● **Korevaar, Jacob:** *Approximation and interpolation applied to entire functions.* Proefschrift ter verkrijging van de graad van Doctor in de Wis- en Natuurkunde aan de Rijks-Universiteit te Leiden. Amsterdam: Drukkerij Holland N. V. (1949).

In einem ersten Teil behandelt Verf. die Approximation ganzer Funktionen durch Polynomfolgen, die in jedem beschränkten Gebiet gleichmäßig ist. Im Anschluß an die klassischen Ergebnisse von Laguerre und Pólya und an die Untersuchungen von Obrechhoff [Actual. sci. industr. No. 891, Paris 1941] Weisner [Bull. Amer. math. Soc. 47, 160—163 (1941); dies. Zbl. 25, 165] und Szász [Bull. Amer. math. Soc. 49, 377—383 (1943)] stellt sich Verf. die Aufgabe, bei gegebener Punktmenge R jene ganzen Funktionen, die sogenannten R -Funktionen, zu charakterisieren, die sich durch Polynome mit Nullstellen in R approximieren lassen. Die obigen Resultate beziehen sich auf den Fall, wo R eine Halbgerade, eine Gerade oder ein Winkelraum von der Öffnung $< \pi$ oder $= \pi$ ist. D^k ($k = 1, 2, \dots$) bezeichne die Menge der Punkte $e^{i\varphi^k}$, wo φ die asymptotischen Richtungen von R ($\arg z_n \rightarrow \varphi$, $z_n \in R$, $|z_n| \rightarrow \infty$) durchläuft. Für unbeschränkte R sind folgende Fälle zu unterscheiden: Entweder es gibt kein k , für welches D^k einem Halbkreisbogen angehört (Fall I), oder es gibt ein solches und damit auch ein kleinstes k . Für dieses hat D^k entweder schon auf einem kleineren Kreisbogen Platz (Fall II) oder nicht (Fall III). Im Falle I sind die R -Funktionen jene ganzen Funktionen, deren Nullstellen der abgeschlossenen Hülle \bar{R} angehören. Im Falle II sind sie von der Form

$$A e^{a_1 z + \dots + a_k z^k} \cdot z^m \prod_p \left(1 - \frac{z}{z_p} \right)^{z/z_p + \dots + (k-1)^{-1} (z/z_p)^{k-1}},$$

wo $z_p \in \bar{R}$, $\sum |z_p|^{-k} < \infty$, die A , a_1, \dots, a_{k-1} beliebig sind und $-a_k/|a_k|$ dem genannten Kreisbogen angehört. Für den Fall III sind nur Teilresultate vorhanden. Viele Spezialfälle werden eingehend diskutiert. Viel kleiner wird die Klasse der ganzen Funktionen, wenn die approximierenden Polynome die Teilsummen einer Potenzreihe sind. Sie sind in den meisten Fällen von der Ordnung 0. — In einem

2. Teil verallgemeinert Verf. einige bekannte Resultate über ganze Funktionen vom Exponentialtypus: Es sei $f(z)$ eine solche Funktion mit dem Wachstumsindikator $h(\varphi)$, die auf einer gewissen Punktfolge $\{z_n\}$ beschränkt ist. Die Folge $\{z_n\}$ sei symmetrisch bezüglich 0 und meßbar, d. h. die Stellenanzahl in $|z| < r$, $\varphi_1 \leq \arg z < \varphi_2$, sei asymptotisch gleich $(k(\varphi_2) - k(\varphi_1)) \cdot r$ für irgend zwei Stetigkeitsstellen einer wachsenden Funktion $k(\varphi)$. Es gebe ferner ein $c > 0$, so daß $|z_m - z_n| \geq c |m - n|$ ist. Gilt dann

$$h(\varphi) < \pi \int_0^{2\pi} |\sin(\varphi - \theta)| dk(\theta)$$

für zwei diametrale Richtungen $\varphi = \varphi_0$ und $\varphi = \varphi_0 + \pi$, so ist f notwendig eine Konstante. Verschiedene Spezialfälle und Erweiterungen werden diskutiert. Die diesbezüglichen Arbeiten des Ref. [Comment. math. Helvetici **11**, 180—214 (1938), **12**, 25—65 (1939), **14**, 314—349 (1942) und **18**, 177—203 (1946)] waren dem Verf. offenbar unbekannt.

Pfluger (Zürich).

Macintyre, A. J. and R. Wilson: Associated integral functions and singular points of power series. J. London math. Soc. **22**, 298—304 (1947).

Verff. betrachten die beiden assoziierten ganzen Funktionen

$$F_1(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n \quad \text{und} \quad F_2(z) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma\{(n+1)\sigma\}} \cdot z^n \quad (\sigma > 0),$$

je vom Mitteltypus der Ordnung ϱ_1 bzw. ϱ_2 und beweisen, daß ihre Wachstumsindikatoren

$$h_k(\Phi) = \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\varrho_k} \log |F_k(re^{i\Phi})|, \quad k = 1, 2,$$

für die gleichen Φ ihr Maximum erreichen. Daraus ergibt sich die folgende Anwendung: Stellt die Potenzreihe $\psi(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n = G(1/(1-z))$ eine ganze Funktion G von $1/(1-z)$ dar, und zwar von positiver endlicher Ordnung ϱ , so können bekanntlich die Koeffizienten c_1, c_2, \dots durch eine ganze Funktion $F(z)$ vom Mitteltypus der Ordnung $\varrho/(1+\varrho)$ interpoliert werden. Aus dem obigen Satz folgt nun weiter, daß die Ausdrücke

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} R^{-\varrho/(1+\varrho)} \cdot \log |F(Re^{i\Phi})| \quad \text{und} \quad \limsup_{r \rightarrow 0} r^{\varrho} \log |\Psi(1 - re^{-i\Phi})|$$

ihr Maximum je für denselben Wert von Φ erreichen.

Pfluger (Zürich).

Veržbinskij, M. L.: Über die Verteilung der Wurzeln der L -Transformationen ganzer transzendenter Funktionen. Math. Sbornik, II. s. **22**, 391—424 (1948) [Russisch].

Ausgangspunkt vorliegender Untersuchungen ist folgender klassischer Satz von Laguerre: Es sei $f(z) = \sum a_n z^n$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und mit lauter reellen Wurzeln, ferner sei $P(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und lauter negativen Wurzeln, dann sind auch alle Wurzeln von $F(z) = \sum a_n P(n) z^n$ reell. Dieser Satz wurde von G. Pólya und I. Schur [J. reine angew. Math. **144**, 89—113 (1914)] und von G. Pólya [Acta Math., Uppsala **48**, 305—317 (1926)] verallgemeinert, indem sie für $f(z)$ und $P(x)$ ganze transzendente Funktionen nahmen. Verf. stellt sich die Aufgabe, die Voraussetzung bezüglich der Wurzeln von $f(z)$ durch schwächere zu ersetzen. In Fortsetzung seiner früheren Untersuchungen [Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. **30**, 774—778 (1941); **33**, 99—102 (1942)] erhielt er eine Reihe von Sätzen, in denen er aus der Lage der nichtreellen Wurzeln von $f(z)$ auf die von $F(z)$ schließt. Sein Hauptresultat lautet wie folgt: Es sei $f(z) = \sum a_n z^n$ eine ganze transzendente Funktion mit reellen Koeffizienten, von Geschlecht $k \leq 1$ und Ordnung $\omega < k + 1$, es sei ferner $P(x)$ eine ganze transzendente Funktion von Geschlecht 1, welche keine anderen als reelle negative Wurzeln $-x_1 > -x_2 > \dots$

hat, es existiere $l = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{x_n}$, und es bedeute τ den Konvergenzexponenten der Folge x_n ; nehmen wir an, daß $\min(1/\tau - l, 1/\omega - l) > \frac{1}{2}$ ist, dann nähern sich die nichtreellen Wurzeln von $F(z) = \sum a_n P(n) z^n$ für $R(z) \rightarrow \pm \infty$ asymptotisch gegen die reelle Achse.

A. Rényi (Budapest).

Heins, Maurice: On the Denjoy-Carleman-Ahlfors theorem. Ann. Math., Princeton, II. s. 49, 533—537 (1948).

Si $M(r)$ est le maximum sur $|z| = r$ d'une fonction entière f qui a n valeurs asymptotiques différentes, on sait d'après Denjoy-Carleman-Ahlfors que $A(r) = r^{-n/2} \log M(r)$ a pour $r \rightarrow \infty$ une $\liminf > 0$. En supposant cette \liminf finie l'aut. montre que $[\log \log M(r)] / \log r \rightarrow \frac{n}{2}$, et espère même que $A(r)$ a une limite. Il utilise le théorème de déformation d'Ahlfors dans l'application conforme sur une demi-bande convenable de la région limitée par deux chemins asymptotiques consécutifs. En fait il traite même directement un problème plus général sur les fonctions sousharmoniques.

Brelot (Grenoble).

Dinghas, Alexander: Zur Abschätzung der a -Stellen ganzer transzendenter Funktionen mit Hilfe der Shimizu-Ahlfors'schen Charakteristik. Math. Ann., Berlin 120, 581—584 (1949).

$f(z)$ étant une fonction entière, on introduit la quantité

$$\mu(r, a) = \min \{1, \min |f(z) - a|\} \text{ pour } |z| = r.$$

Soient $S(r)$ la caractéristique de Shimizu-Ahlfors de $f(z)$, $n(r, a)$ le nombre de zéros de $f(z) - a$ situés dans le cercle $|z| < r$. Si $\int_0^\infty \mu^2(r, a) \frac{dr}{r} = \infty$ il existe un ensemble Δ de valeurs de r , satisfaisant à $\int_\Delta \mu^2(r, a) \frac{dr}{r} = \infty$, sur lequel $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, a)}{S(r)} = 1$.

Dufresnoy (Bordeaux).

Combes, Jean: Familles normales sur une surface de Riemann. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 370—381 (1948).

$E(z)$ sei eine ganze Funktion und F die über $|z| < \infty$ ausgebreitete m -blättrige Riemannsche Fläche von $\sqrt[m]{E(z)}$. Mit Normalitätskriterien für Scharen von Funktionen, die auf F eindeutig und analytisch sind, wird die Frage nach der Existenz von Ausnahmewerten untersucht.

Pfluger (Zürich).

Combes, Jean: Sur un critère de normalité pour les familles de fonctions algébroides. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 28—30 (1948).

Die Resultate der vorangehenden Note werden auf algebroiden Funktionen ausgedehnt: Die algebroiden Funktionen, die in einem Gebiet drei Werte nicht annehmen und deren Verzweigungspunkte um mehr als $d > 0$ voneinander entfernt sind, bilden eine normale Schar. Es ergeben sich daraus Kriterien, wann eine algebroiden Funktion höchstens zwei Ausnahmewerte haben kann.

Pfluger.

Wittich, Hans: Über eine Klasse meromorpher Funktionen. Arch. Math., Oberwolfach 1, 160—166 (1948).

Sur le plan complexe des w , une surface de Riemann ouverte, simplement connexe, ramifiée sur un nombre fini de points est donnée par son schème (Streckenkomplex) de Elfving. Lorsque ce schème présente un nombre fini de bouts périodiques, la surface est du type parabolique: elle peut être représentée conformément sur le plan fini des z par une fonction analytique uniforme $w = w(z)$. L'Aut. montre que, dans ce cas, la connaissance du schème permet d'étudier aisément la répartition des valeurs de la fonction $w(z)$. Il donne le comportement asymptotique des fonctions $n(r, a)$, $n_1(r, a)$, d'où l'ordre de la fonction $w(z)$, les défauts $\delta(a)$ et indices de ramification $\vartheta(a)$. On a toujours ici $\Sigma(\delta(a) + \vartheta(a)) = 2$. —

La méthode utilisée est simplement esquissée; elle repose essentiellement sur une propriété de la représentation quasi-conforme [cf. H. Wittich, *ce Zbl.* **30**, 356].

Dufresnoy (Bordeaux).

Lax, Peter D.: The quotient of exponential polynomials. *Duke math. J.* **15**, 967—970 (1948).

Ist der Quotient zweier Exponentialpolynome (d. h. endlicher Summen von Gliedern $a_j e^{b_j z}$) eine ganze Funktion von z , so ist er auch ein Exponentialpolynom. Für diesen Satz von J. F. Ritt [Trans. Amer. math. Soc. **31**, 680—686 (1929)] wird ein Beweis gegeben, der dem von H. Selberg [Avhdl. Norske Vid. Akad. Oslo I, **1932**, No. 10; dies. *Zbl.* **4**, 12] nahe verwandt ist. Er liefert die Behauptung auch, wenn vom Quotienten nur die Regularität in einem Winkel $> \pi$ vorausgesetzt wird. Aus dem Satz von Ritt wird mit der Laplace-Transformation gefolgert: Sind $a(z)$ und $b(z)$ im Unendlichen verschwindende rationale Funktionen mit einfachen Polen, ist $\varphi(z)$ im Unendlichen regulär und $\varphi(\infty) = 0$ und gilt $a(z) = \int \varphi(z/t) b(t) dt$ bei großem $|z|$ und Integration über einen geeigneten Kreis, so ist auch $\varphi(z)$ rational mit einfachen Polen. (Die Formel ist gegenüber dem Text der Arbeit berichtigt.)

H. Kneser (Tübingen).

Blambert, Maurice: Sur les singularités des fonctions analytiques définies par des développements dirichlétiens. *C. r. Acad. Sci., Paris* **226**, 1666—1668 (1948).

Es wird mitgeteilt, wie ein Satz von E. Borel über die Hadamardsche Komposition von zwei Potenzreihen auf Dirichletsche Reihen übertragen werden kann.

Pfluger (Zürich).

Atkinson, F. V.: A mean value property of the Riemann zeta-function. *J. London math. Soc.* **23**, 128—135 (1948).

Durch $\vartheta(t') = \alpha + \vartheta(t)$, α beliebige reelle Konstante, $e^{2i\vartheta(t)} = \chi(\frac{1}{2} + it)$, $\chi(s) = 2^{1-s} \cdot \pi^{-s} \cdot \cos \frac{1}{2}\pi s \cdot \Gamma(s)$ wird t' als Funktion von t erklärt. Verf. beweist, daß

$$\int_{T_0}^T \zeta(\frac{1}{2} + it') \zeta(\frac{1}{2} + it) dt \sim e^{-i\alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot T \log T$$

für $T \rightarrow \infty$. Aus diesem Resultat, dessen Spezialfall $\alpha = 0$ wohlbekannt ist, folgt

$$N_1(T) > A \cdot T \cdot (\log T)^{-1},$$

wobei $N_1(T)$ die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ im Intervall $\frac{1}{2}T < t < T$ bezeichnet.

Pfluger (Zürich).

Turán, Paul: On some approximative Dirichlet-polynomials in the theory of the zeta-function of Riemann. *Danske Vid. Selsk., mat.-fysiske Medd.* **24**, Nr. 17, 36 S. (1948).

In dieser Arbeit werden die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion mit denjenigen der Partialsummen $U_n(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + \dots + n^{-s}$ in Beziehung gebracht. Es wird unter anderem der folgende interessante Satz bewiesen: Wenn es positive Konstante n_0 , K und θ ($\frac{1}{2} \leq \theta < 1$) gibt, so daß $U_n(s) \neq 0$ in $\Re s \geq 1 + K \cdot n^{-1+\theta}$ und $n > n_0$, so ist $\zeta(s) \neq 0$ in $\Re s > \theta$. Insbesondere, wenn $U_n(s) \neq 0$ in $\Re s > 1$ oder $\Re s \geq 1 + K/\sqrt{n}$, $n > n_0$, so ist die Riemannsche Vermutung zutreffend. Die angegebene Bedingung kann noch in verschiedener Weise abgeschwächt werden. So braucht sie zum Beispiel nur für „genügend viele“ n erfüllt zu sein. Es ergeben sich analoge Resultate, wenn an Stelle der $U_n(s)$ ihre

Cesàroschen Mittel beliebiger Ordnung oder die Summen $V_n(s) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \cdot r^{-s}$

betrachtet werden. Es ist bemerkenswert, daß es dem Verf. nicht gelungen ist, aus der Gültigkeit der Riemannschen Vermutung ein entsprechendes Resultat über die Nullstellen der $U_n(s)$ zu beweisen. Er konnte aber zeigen, daß tatsächlich $U_n(s) \neq 0$ ist für $\Re s > 1 + 2 \frac{\log \log n}{\log n}$, $n > n_0$, und sogar für $\Re s > 1$, $\tau_0 \leq t \leq e^{K_1 \log n \log \log n}$

(τ_0 und K_1 numerisch Konstante).

Pfluger (Zürich).

Hornich, Hans: Die algebraischen Funktionen, deren Iteration die Identität liefert. *Mh. Math.*, Wien **52**, 311—322 (1948).

Gefragt wird nach algebraischen Funktionen $\varphi(z)$, bei denen, bei geeigneter Wahl des einzusetzenden Elementes, $\varphi(\varphi(z)) = z$ ist. Ist $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ eine irreduzible, ebene, algebraische Kurve der Ordnung n vom Geschlecht p und ist $F(u + v, -uv, 1)$ irreduzibel und nicht konstant (das tritt nur bei $F = a\xi$ ein), so wird durch $F(u + v, -uv, 1) = 0$ eine solche Funktion $v = \varphi(u)$ bestimmt, und alle solchen Funktionen erhält man auf diese Art. Hat $F = 0$ mit $\xi^2 + 4\eta\zeta = 0$ genau $2n - 2h$ Schnittpunkte ungerader Vielfachheit, so ist $2p + n - h - 1$ das Geschlecht von $\varphi(u)$. Ist $n - h = 0$ und $F(u + v, -uv, 1) = G \cdot H$ reduzibel, so sind G und H reduzibel, und $G = 0$ und $H = 0$ bestimmen eine algebraische Funktion und ihre Umkehrfunktion. Schließlich wird gefragt, auf welchen algebraischen Gebilden es zwei Funktionen u und $v = \varphi(u)$ derart gibt, daß $\varphi(\varphi(u)) = u$ ist. Es sind das die Gebilde mit einer involutorischen Transformation in sich, d. h. die rationalen, elliptischen und hyperelliptischen und andere vom Geschlecht > 2 ; die letzteren enthalten reduzible Teilsysteme von Integralen erster Gattung.
H. Kneser (Tübingen).

Automorphe Funktionen:

Hällström, Gunnar af: Über Substitutionen, die eine rationale Funktion invariant lassen. *Acta Acad. Aboensis, Math. Physica* **15**, Nr. 6, 44 S. (1946).

Hällström, Gunnar af: Zur Reduzibilität der Automorphiefunktionen rationaler Funktionen. *Acta Acad. Aboensis, Math. Physica* **15**, Nr. 8, 8 S. (1946).

Hällström, Gunnar af: Rationale Funktionen mit Automorphiefunktionen gleicher Vieldeutigkeit. *Acta Acad. Aboensis, Math. Physica* **16**, Nr. 2, 10 S. (1948).

Hällström, Gunnar af: Über die Automorphiefunktionen meromorpher Funktionen. *Acta Acad. Aboensis, Math. Physica* **16**, Nr. 4, 27 S. (1949).

I. La fonction $f(z)$ étant donnée, on considère les fonctions $S(z)$, appelées fonctions d'automorphie, telles que $f(S(z)) \equiv f(z)$. L'étude des fonctions S en général a été faite par Marty et Shimizu. L'Aut. la reprend ici dans son ensemble, pour le cas où $f(z)$ est une fonction rationnelle, en utilisant des méthodes très simples qui lui permettent de retrouver, sous des formes nouvelles, les résultats connus et d'obtenir quelques résultats nouveaux. — Si l'on pose $f(z) = Q_1(z)/Q_2(z)$, on a

$$P(z, S) \equiv \frac{Q_1(S) Q_2(z) - Q_1(z) Q_2(S)}{S - z} = 0.$$

Les fonctions S sont algébriques; une fonction S rationnelle est nécessairement homographique. Après avoir établi ce point, l'Aut. recherche à quelles conditions les fonctions S constituent un groupe. Puis il étudie la décomposition du polynôme $P(z, S)$ en facteurs, d'où la classification des fonctions $f(z)$ en fonctions automorphes (s'il existe au moins un facteur du premier degré en S), totalement automorphes (si tous les facteurs sont du premier degré), semi-automorphes (si tous les facteurs sont du second degré). Le cas où $f(z)$ est fonction rationnelle d'une autre fonction rationnelle $g(z)$ est étudié. L'Aut. résout ensuite le problème suivant: quand une fonction algébrique donnée peut-elle être une fonction d'automorphie? Il étudie enfin les rapports étroits qui existent entre la décomposition de $P(z, S)$ en facteurs et la structure de la surface de Riemann de la fonction $f(z)$; le cas où $f(z)$ est un polynôme est traité en détail. Application à la recherche des fonctions rationnelles (en particulier des polynômes) semi-automorphes.

II. Dans cet article, l'Aut. poursuit l'étude (entreprise dans le mémoire précédent) des rapports qui existent entre la possibilité de décomposition en facteurs du polynôme $P(z, S)$ et la structure de la surface de Riemann de la fonction rationnelle $f(z)$. Cela le conduit incidemment à montrer la non-existence de fonctions rationnelles dont la surface de Riemann présenterait des points de ramification jouissant de certaines propriétés.

III. Lorsque le polynome $P(z, S)$ se décompose en un produit de facteurs du k -ième degré en S , la fonction $f(z)$ est dite automorphe d'ordre k . Elle est dite proprement automorphe d'ordre k si les facteurs sont indécomposables. Le cas $k = 1$ (fonctions totalement automorphes) est bien connu. — Dans cet article, l'Aut. construit des exemples de fonctions rationnelles proprement automorphes d'ordre k avec $k = 2, 3, 4$ et 6. Les fonctions trouvées sont représentées à l'aide de fonctions totalement automorphes dans le plan fini (fonction \wp de Weierstraß, fonctions de Schwarz).

IV. L'Aut. étend aux fonctions méromorphes $f(z)$ certains des résultats qu'il avait obtenus dans les mémoires précédents pour les fonctions rationnelles. Il donne des exemples de fonctions méromorphes dont les fonctions d'automorphie appartiennent à un ou plusieurs des types suivants: a) fonctions homographiques; b) fonctions algébriques; c) fonctions transcendentes à points de ramification algébriques; d) fonctions transcendentes à points de ramification transcendants; e) fonctions transcendentes à points de ramification des deux espèces. Le quotient $\frac{f(S) - f(z)}{S - z}$ peut être représenté de façon remarquable sous forme d'un produit lorsque toutes les fonctions d'automorphie de $f(z)$ sont algébriques. *Dufresnoy.*

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Cohn, Richard M.: Manifolds of difference polynomials. Trans. Amer. math. Soc. **64**, 133—172 (1948).

Im Anschluß an ältere Untersuchungen von J. F. Ritt bzw. J. F. Ritt und H. W. Raudenbush [Bull. Amer. math. Soc. **40**, 303—308 (1934) bzw. Trans. Amer. math. Soc. **46**, 445—452 (1939); dies. Zbl. **9**, 215; **22**, 106] wird die Theorie der zu Systemen von Differenzenpolynomen gehörigen Mannigfaltigkeiten in wesentlichen Punkten weiterentwickelt. Vorbildlich ist oft das grundlegende Werk von J. F. Ritt über Differentialgleichungen vom algebraischen Standpunkt [Amer. math. Soc. Colloq. Publ. **14** (1932); dies. Zbl. **5**, 594]. Da im Gegensatz zu den Differentialgleichungen kein passendes Existenztheorem für analytische Differenzengleichungen zur Verfügung steht, beschränken sich die Untersuchungen auf Differenzenpolynome über einem abstrakten Differenzkörper J , der gleichzeitig mit einem beliebigen Element auch seine sämtlichen „Transformierten“ enthält. Zur Bezeichnung der Transformiertenbildung wird nicht die anschauliche Schreibweise $a(x)$, $a(x+1)$, $a(x+2)$, ... benutzt, sondern es werden einfach Indizes angehängt, so daß etwa u_{ij} die j -te Transformierte von $u_i = u_{i0}$ bedeutet. Ein Ideal von Differenzenpolynomen, das gleichzeitig mit einem beliebigen Polynom auch alle Transformierten enthält, heißt reflexiv. — Die Arbeit zerfällt in drei Teile. Im ersten wird eine theoretische Methode zur Elimination von Unbekannten aus Systemen von algebraischen Differenzengleichungen entwickelt und mit ihrer Hilfe für einen Differenzkörper J ein Gegenstück zu dem Steinitzschen Satz gewonnen, daß sich jede beliebige Körpererweiterung in einen rein transzendenten und einen algebraischen Teil zerlegen läßt (Theorem I). Weiter wird für reflexive Primideale von Differenzenpolynomen (immer in Übereinstimmung mit entsprechenden Ergebnissen von Ritt über Differentialgleichungen) ein Satz hergeleitet, der dem Satz von der Invarianz der Dimension eines gewöhnlichen Polynomprimideals analog ist (Theorem III). — Im zweiten Teil wird ein von Ritt auf Differenzenpolynome erster Ordnung über analytischen Differenzkörpern angewandter Faktorzerlegungsprozeß auf Differenzenpolynome beliebiger Ordnung über abstrakten Differenzkörpern übertragen, und es wird so eine Art von Existenztheorem gewonnen, das für die Weiterentwicklung der Theorie grundlegend ist. Es zeigt sich nämlich, daß zu jedem Differenzenpolynom A endlich viele reflexive Primideale gehören, die zwar A , aber kein Polynom von niedrigerer Ordnung als A enthalten. Sie definieren die wesentlichen, nichtsingulären Mannigfaltigkeiten von

A (Theorem IV). Ein Differenzenpolynom erster Ordnung besitzt außer den nicht-singulären keine weiteren wesentlichen Mannigfaltigkeiten (Theorem V). Hingegen können, wie Beispiele zeigen, bei Differenzenpolynomen A von mindestens zweiter Ordnung wesentliche singuläre Mannigfaltigkeiten auftreten, die durch reflexive Primideale definiert werden, in denen neben A noch Polynome von niedrigerer Ordnung als A vorkommen. Über diese singulären Mannigfaltigkeiten lassen sich vorerst keine näheren Aussagen machen. — Die Bestimmung der wesentlichen, nichtsingulären Mannigfaltigkeiten von A bzw. der zugehörigen Primideale beruht auf der nach einem wohldefinierten Algorithmus durchzuführenden Berechnung endlich vieler von A ausgehender „Basisfolgen“. Dabei liefert das Verfahren kein Kriterium, um in jedem Einzelfalle festzustellen, wann die Rechnung abgebrochen werden muß. Wohl aber ist man mit Hilfe des angegebenen Algorithmus stets imstande, bei einem beliebigen vorgegebenen Differenzenpolynom B mit endlich vielen Schritten zu entscheiden, ob es auf einer wesentlichen, zu A gehörigen Mannigfaltigkeit verschwindet oder nicht. Am Schluß des zweiten Teils werden die allgemeinen Ergebnisse an einigen instruktiven Beispielen anschaulich gemacht. — Der dritte Teil knüpft wieder an den ersten an. Theorem IX charakterisiert die Basen eines reflexiven Primideals. Weiter werden in Ergänzung von Theorem III, das gewissermaßen den Transzendenzgrad festlegte, die Ordnung und die effektive Ordnung eines reflexiven Primideals eingeführt (Theorem X). Damit ist dann — um die Ausdrucksweise des Verf. zu gebrauchen — die Dimensionalität der reflexiven Primideale vollständig beschrieben. Schließlich wird, wieder in enger Anlehnung an die Rittsche algebraische Theorie der Differentialgleichungen, die „Resolvente“ eines reflexiven Primideals gebildet. Besonders bemerkenswert ist der im Zusammenhang mit dieser letzten Untersuchung eingeführte Begriff des durch die Existenz höchstens einer Lösungen ausgezeichneten (keineswegs notwendig linearen) quasi-linearen Systems von Differenzgleichungen. *Krull (Bonn).*

Montel, Paul: Sur un système d'équations fonctionnelles. Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 99—106 (1948).

Für die Funktion $f(x)$ wird die Differenz erster Ordnung mit $\Delta_h[f(x)] = f(x+h) - f(x)$ und die Differenz n -ter Ordnung mit

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n}[f(x)] = \Delta_{h_1} \{ \Delta_{h_2} [\Delta_{h_3} \dots \Delta_{h_{n-1}} (\Delta_{h_n}[f(x)]) \dots] \}$$

definiert. Mittels vollständiger Induktion wird zunächst folgender Satz bewiesen: Notwendig und hinreichend dafür, daß eine stetige reelle Funktion $f(x)$ ein Polynom von höchstens $n-1$ -tem Grade ist, sind die beiden Gleichungen:

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n}[f(x)] = 0, \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_n}[f(x)] = 0 \text{ [kein } h_i/k_j \text{ (} i, j = 1, 2, \dots, n \text{) rational].}$$

Bemerkenswert ist, daß bei Anwesenheit eines einzigen rationalen Quotienten h_i/k_j die Lösung $f(x)$ kein Polynom zu sein braucht. — Ähnlich wie der erste Satz wird dann eine Verallgemeinerung des Satzes von Jacobi ($n=1$!) bewiesen: Notwendig und hinreichend dafür, daß eine analytische Funktion $f(x)$ ein Polynom von höchstens $n-1$ -tem Grade ist, sind die Gleichungen:

$$(1) \quad \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n}[f(x)] = 0, \quad \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_n}[f(x)] = 0, \quad \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \dots \Delta_{l_n}[f(x)] = 0$$

(kein Tripel h_i, k_j, l_s erfüllt eine Gleichung $ph_i + qk_j + rl_s = 0$ mit ganzzahligen p, q, r).

Auch bei diesem Satz ist bemerkenswert, daß die lineare Abhängigkeit eines einzigen Tripels $h_{i_0}, k_{j_0}, l_{s_0}$ die Polynomeigenschaft von $f(x)$ nicht mehr erforderlich macht. — Bei einer Funktion $f(x, y)$ mit reellen Variablen x und y wird

$$\Delta_h[f(x, y)] = f(x+\eta, y+\eta') - f(x, y) \quad (h = \eta + i\eta')$$

definiert. Jede stetige Funktion $f(x, y)$, welche den Gleichungen (1) mitsamt einer Nebenbedingung für die h_i, k_j, l_s genügt, ist ein Polynom, dessen Grad (bezüglich aller Variablen) den Wert $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ nicht übersteigt. Dieser Satz wird auch auf analytische Funktionen mit zwei Variablen übertragen. *Töpfer (Köln).*

● **Baule, Bernhard:** Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. IV: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 2. Aufl. Leipzig: S. Hirzel Verlag 1949. 110 S. mit 41 Abb.

Ważewski, T. et J. Szarski: Sur l'unicité des intégrales de l'équation de Clairaut, modifiée. Ann. Soc. Polonaise Math. **20**, 157—160 (1948).

L'equazione differenziale $y' = f(x, y)$, con $f(x, y)$ continua nel rettangolo $R: |x - a| < c, |y - b| < d$, è ivi detta un'equazione di Clairaut modificata se per ogni punto di R passa una (ed una sola) retta r tale che la parte comune ad R ed r sia un segmento integrale della $y' = f$. Orbene gli A. dimostrano che allora questi segmenti sono anche tutte le curve integrali della $y' = f$.

G. Scorza Dragoni (Padova).

Cafiero, Federico: Su di un teorema di Montel relativo alla continuità rispetto al punto iniziale, dell'integrale superiore ed inferiore di una equazione differenziale. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **17**, 186—200 (1948).

Wenn $f(x, y)$ in dem Rechteck $R: a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta$ den Bedingungen von Carathéodory genügt, d. h. bez. x meßbar und bez. y stetig ist, so besteht folgende fundamentale Eigenschaft: Jede Gruppe von Bedingungen, die für die Existenz des von einem beliebigen Punkte (x_0, y_0) von R , mit $\alpha < y_0 < \beta$, ausgehenden Maximal- und Minimalintegrals der Gleichung $y' = f(x, y)$ hinreichen, ist auch hinreichend für die stetige Abhängigkeit des Maximal-(Minimal-)integrals von den Koordinaten des Anfangspunktes, der im Maximal- bzw. Minimalbereich variiert. — Dieses Ergebnis umfaßt ein früheres desselben Verf. (dies. Zbl. **29**, 260) und eines von Montel. Die Arbeit schließt mit einer scharfsinnigen Bemerkung über das Wesen des Beweises für den vorstehenden Satz von der stetigen Abhängigkeit.

G. Sansone (Florenz).

Borg, Göran: On a Liapounoff criterion of stability. Amer. J. Math. **71**, 67—70 (1949).

Secondo l'A., l'equazione differenziale $y'' + f(x)y = 0$ è stabile, se $f(x)$ è continua, periodica di periodo π e soddisfa alle condizioni

$$f(x) \not\equiv 0, \quad \int_0^\pi f(x) dx \geq 0, \quad \int_0^\pi |f(x)| dx \leq 4/\pi.$$

Nessuna di queste ultime disuguaglianze può essere sostituita da disuguaglianze del tipo $\int_0^\pi f(x) dx \leq \varepsilon$ o del tipo $\int_0^\pi |f(x)| dx \geq \varepsilon + 4/\pi$ ($\varepsilon = \text{cost.} > 0$) senza compromettere la validità del teorema.

G. Scorza Dragoni (Padova).

Schmid, Hermann Ludwig: Störungsrechnung bei dreigliedrigen Rekursionen. II. Math. Nachr., Berlin **2**, 35—44 (1949).

Zugrunde gelegt ist dasselbe unendliche Gleichungssystem

$$p_{\nu+2k-1} a_{2(k-1)}^{(\nu)} + q_{\nu+2k} a_{2k}^{(\nu)} + r_{\nu+2k+1} a_{2(k+1)}^{(\nu)} = 0, \quad k = 0, \pm 1, \dots,$$

wie in der ersten Mitteilung [dies. Zbl. **31**, 126]; die q hängen linear vom Eigenwert λ ab und die p, q, r sind gewisse Polynome eines Störungsparameters γ^2 . Die Eigenwerte $\lambda^{(\nu)}$ werden angesetzt als Potenzreihen $\lambda^{(\nu)} = \sum_e \lambda_e^{(\nu)} \gamma^{2e}$. Die

Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten der $\lambda^{(\nu)}$ gelingt in dieser Mitteilung in einfacher Weise durch Ausnutzung gewisser Symmetrien, indem jeder Koeffizient als Summe zweier Bestandteile geschrieben wird, die auseinander durch eine „Spiegelung“ der Indizes hervorgehen.

Rellich (Göttingen).

Hartman, Philip: Differential equations with non oscillatory eigenfunctions. Duke math. J. **15**, 687—709 (1948).

Zu dem Eigenwertproblem $x'' + (\lambda - q(t))x = 0, \quad \alpha x(0) + \beta x'(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq \infty$ wird bewiesen: Wenn $q(t)$ in $0 \leq t < s$ stetig ist und wenn es eine

(reelle) Zahl μ gibt, so daß $y'' + (\mu - q)y = 0$, $\alpha y(0) + \beta y'(0)$ eine Lösung mit n Nullstellen in $0 < t < \infty$ besitzt, dann gilt: 1. es liegt für $t = +\infty$ der Grenzpunktfall vor; 2. es gibt genau $n - 1$ Eigenwerte $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ unter μ , wenn $n > 0$, und keinen Eigenwert, wenn $n = 0$; 3. eine Eigenfunktion zu λ_k hat genau k Nullstellen in $0 < t < \infty$; 4. das kontinuierliche Spektrum ist unter μ leer.

Rellick (Göttingen).

Stefaniak, H. St.: Eine einfache Methode zur Ermittlung der charakteristischen Daten eines gedämpft schwingenden Systems zweiter Ordnung mit Hilfe einer neuen Auftragung der Resonanzkurven. Z. angew. Math. Mech. 28, 368—371 (1948).

Die Mitteilung enthält einen Vorschlag zur Bestimmung der Kennzahlen eines Schwingers aus Resonanzversuchen, d. h. zur Bestimmung der konstanten Koeffizienten der linken Seite der linearen, inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \quad \ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = A \sin \omega t + B \cos \omega t.$$

Da man bei dieser Aufgabe einfacher als auf dem vom Verf. beschriebenen Wege zum Ziel gelangt, wenn man sich der Methode der komplexen Schwingungsrechnung [vgl. z. B. Ref., Deutsche Math. 2, 18—31 (1937)] bedient, möge im Folgenden kurz der Gang der Rechnung im Komplexen skizziert werden. Bei der vorerwähnten Methode wird an Stelle der Differentialgleichung (1) die gewöhnliche Gleichung

$$(-\omega^2 + 2D\omega_0i\omega + \omega_0^2)(a + ib) = A + iB$$

betrachtet. Aus dieser folgt

$$(2) \quad z(\omega) = \frac{A + iB}{a + ib} = \omega_0^2 + 2D\omega_0i\omega - \omega^2,$$

wobei ω ein positiver Parameter ist. $z(\omega)$ stellt für $0 < \omega < \infty$ den oberen Ast einer in der z -Ebene gelegenen Parabel dar (Rungesche Parabel), deren Achse in die x -Achse fällt und deren Scheitel sich im Punkte ω_0^2 , 0 befindet. Wird durch einen Resonanzversuch mit $\omega = \omega_1$ die zu $A_1 + iB_1$ gehörende Zahl $a_1 + ib_1$ bestimmt, so folgt vermöge $z_1 = z(\omega_1) = (A_1 + iB_1)/(a_1 + ib_1)$ und der aus (2) nach Trennung von Real- und Imaginärteil sich ergebenden Gleichungen

$$(3) \quad x = \omega_0^2 - \omega^2, \quad y = 2D\omega_0\omega,$$

$$(4) \quad \omega_0^2 = x_1 + \omega_1^2, \quad 2D\omega_0 = y_1/\omega_1,$$

welches die gesuchten Koeffizienten der linken Seite von (1) sind. Werden die Kurven (3) in einer ω , x -Ebene und einer ω , y -Ebene dargestellt, es sind dies eine Parabel und eine Gerade, so lassen sich die Koeffizienten durch elementare geometrische Konstruktionen ermitteln. Zur Bestimmung von ω_0^2 bringt man die Parabeltangente im Punkte ω_1 , x_1 , welche das Steigungsmaß $-2\omega_1$ besitzt, mit der x -Achse zum Schnitt. Ist ξ_1 , 0 der Schnittpunkt dieser Tangente mit der x -Achse, so ist $\omega_0^2 = \frac{1}{2}(x_1 + \xi_1)$. Quade (Hannover).

John, Fritz: On harmonic vibrations out of phase with the exciting force. Commun. appl. Math., New York 1, 341—359 (1948).

In der nichtlinearen Differentialgleichung $d^2x/dt^2 = F(x, \cos \omega t)$ besitze die Funktion $F(x, z)$ in dem Streifen $-\infty < x < +\infty$, $-1 \leq z \leq 1$ stetige partielle Ableitungen bis zur 2. Ordnung einschließlich, und es sei dort $F_x < 0$, $F_z > k > 0$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |F| = \infty$, $\lim_{|z| \rightarrow 0} F_z/F = 0$. Verf. untersucht diejenigen Lösungen $x(t)$ der Differentialgleichung, welche periodisch von der Frequenz ω sind, deren Minima bei den Werten $t = 2n\pi/\omega$ der Maxima von $\cos \omega t$ und deren Maxima bei den Minima von $\cos \omega t$ auftreten und die er H.O.P. („harmonics out of phase“) nennt. Durch die Transformation $s = \omega t$, $p = 1/\omega$, (Strich = Ableitung nach s) wird die Differentialgleichung $x'' = p^2 F(x, \cos s)$. Für eine H.O.P. wird $-x(0) = a$ als „untere Amplitude“ und $x(\pi) = b$ als „obere Amplitude“ definiert und bewiesen:

a und b sind stets positiv; zu jedem positiven a existiert eine H.O.P. mit der unteren Amplitude a ; zwei verschiedene H. O. P. können nicht die gleiche untere Amplitude a haben. Untere und obere Amplitude der H.O.P. sind monoton wachsende Funktionen voneinander; für die H.O.P. strebt die Frequenz ω gegen ∞ , wenn die Amplitude gegen Null geht; für ein „symmetrisches System“, d. h. für $F(-x, -z) = -F(x, z)$ fallen untere und obere Amplitude zusammen, und dann gilt für jede H. O. P. $x(s) = -x(\pi - s)$. Eine H.O.P. wird „stabil“ genannt, wenn alle Lösungen der variierten Gleichung $d^2\xi/dt^2 = \xi \cdot \partial F/\partial x$ beschränkt bleiben, andernfalls heißt sie „instabil“; im vorliegenden Fall hängt die Stabilität von den Wurzeln einer quadratischen Gleichung $\lambda^2 - 2A\lambda + 1 = 0$ ab. Verf. nennt die H.O.P. für $A < -1$ „indirekt instabil“, für $A = \pm 1$ „kritisch“, für $A > 1$ „direkt instabil“ und beweist: Für $d\omega/da \geq 0$ ist die H.O.P. entweder direkt instabil oder kritisch und instabil; bei einem symmetrischen System kann eine H.O.P. nicht indirekt instabil sein; für ein solches System ist im Falle $d\omega/da < 0$ eine H.O.P. entweder stabil oder kritisch und stabil. *Collatz (Hannover).*

Titchmarsh, E. C.: On the uniqueness of the Green's function associated with a second-order differential equation. Canadian J. Math. 1, 191—198 (1949).

Le développement de fonctions au moyen de solutions de l'équation $\varphi'' + (\lambda - q(x))\varphi = 0$ ($x \geq 0$) dépend de la fonction de Green $G(x, \xi, \lambda)$, symétrique sur x et ξ , continue et de carré sommable en x , intégrable en x pour $x \neq \xi$, dont le G'_x admet en ξ la discontinuité -1 , enfin satisfaisant à une condition:

$$G(0, \xi, \lambda) \cos \alpha + G'_x(0, \xi, \lambda) \sin \alpha = 0.$$

L'aut. montre l'unicité de G si $q(x) \geq -Ax^2 - B$ (A, B const. > 0). Extension au cas de 2 variables pour le plan entier. *Brelot (Grenoble).*

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Fichera, Gaetano: Sui differenziali totali di qualsivoglia ordine. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 105—108 (1948).

Verf. bezieht sich auf eine Arbeit von Picone, in welcher Integrabilitätsbedingungen für Differentialformen im r -dimensionalen Raume in Integralform angegeben werden. Verf. gibt die lokalen Bedingungen und die der Zahl nach vom Zusammenhange des Gebietes abhängigen Integralbedingungen an, welche für die Integrabilität notwendig und hinreichend sind. *Wolf Gross (Rom).*

Szarski, Jacek: Sur un problème de caractère intégral relatif à l'équation: $dz/dx + Q(x, y) dz/dy = 0$ définie dans le plan tout entier. Ann. Soc. Polonaise Math. 19, 106—132 (1947).

Ważewski [Mathematica, Cluj 8, 103—116 (1934); dies. Zbl. 8, 394] hatte gezeigt: Es gibt in der x, y -Ebene ein einfach zusammenhängendes Gebiet G und in diesem eine Funktion $f(x, y)$, die stetige partielle Ableitungen jeder Ordnung hat und für welche die Differentialgleichung $z_x + f(x, y) z_y = 0$ in dem ganzen Gebiet G nur die trivialen Integrale $z = \text{const.}$ hat. Das Gebiet G war dabei kompliziert. Verf. zeigt, daß die obige Aussage auch gilt, wenn G die ganze x, y -Ebene oder ein achsenparalleles Quadrat ist. *Kamke (Tübingen).*

Zwirner, Guiseppe: Su una particolare classe di equazioni alle derivate parziali del quarto ordine sopra una superficie chiusa. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 17, 139—159 (1948).

Es sei S eine topologisch definierte zweidimensionale Mannigfaltigkeit; die Umgebungen der Punkte von S sollen auf ebene Umgebungen in solcher Weise abgebildet werden, daß bei zwei Abbildungen derselben Umgebung die zwischen den beiden betreffenden Parameterpaaren x, y ; x', y' entstehende Abbildung stets konform ist. Eine Funktion u der Punkte der Mannigfaltigkeit drückt sich in jeder Umgebung als eine von der Parameterdarstellung abhängige Funktion der Para-

meter x, y aus; der Differentialausdruck $\Delta u = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2$ transformiert sich bei Parameteränderung durch Multiplikation mit der Funktionaldeterminante der alten nach den neuen Parametern. Die auf S erklärte Punktmengenfunktion $\iint \Delta u dx dy$ hat demnach einen von der Parameterdarstellung unabhängigen Sinn; Δu wird deshalb als Dichte einer Massenverteilung auf S behandelt. Verf. studiert nun die Gleichung

$$L(u) = \Delta (\Delta u / \alpha) + \beta u = g,$$

wobei α, β, g Dichten bekannter Massenverteilungen, u eine unbekannte Funktion auf S bedeuten. Das Hauptergebnis lautet: die homogene Gleichung $L(v) = 0$ kann höchstens eine endliche Anzahl $p \geq 0$ von linear unabhängigen Lösungen v_1, \dots, v_p haben, und die Existenzbedingungen einer Lösung u von $L(u) = g$ sind die Orthogonalitätsgleichungen $\iint_S g v_i dx dy = 0$ ($i = 1, \dots, p$). Der Beweis folgt in seinen Hauptzügen dem vom Ref. in einer früheren Arbeit [dies. Zbl. 18, 25] aufgestellten Gedankengang, wobei jedoch in manchen Einzelheiten bei dem hier betrachteten Problem eigene Schwierigkeiten zu überwinden waren. *G. Cimmino.*

Ingersoll, Benham M.: The regularity domains of solutions of linear partial differential equations in terms of the series development of the solution. *Duke math. J.* 15, 1045—1056 (1948).

L'A. considera, riattaccandosi a recenti ricerche di S. Bergman, l'equazione complessa a derivate parziali

$$u_{zz^*} + a u_z + a^* u_{z^*} + c u = 0$$

nella funzione incognita u delle due variabili complesse z, z^* , coi coefficienti supposti sviluppabili in serie doppie di potenze sempre convergenti. Se, ponendo in particolare $z = x + i y, z^* = x - i y, \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, le a, a^* divengono complesse coniugate e c diviene reale, la parte reale di una soluzione $u(z, z^*)$ della detta equazione complessa darà luogo a una soluzione $U(x, y)$ dell'equazione reale

$$\frac{1}{4} \Delta U + \frac{1}{2} A U_x + \frac{1}{2} B U_y + C U = 0,$$

dove A, B, C saranno sviluppabili in serie doppie di potenze delle x, y sempre convergenti e a coefficienti reali. Posto $u(z, z^*) = \sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn} z^m z^{*n}, u_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{mn} z^m$,

L'A. ottiene certe equazioni differenziali, cui per ogni n devono soddisfare le u_0, u_1, \dots, u_n , e ne deduce alcune conseguenze circa il campo di regolarità della $u(z, z^*)$ soluzione dell'equazione complessa, o della $U(x, y)$ soluzione dell'equazione reale corrispondente.

G. Cimmino (Bologna).

Bouligand, Georges: Sur les principes géométriques de la théorie des équations aux dérivées partielles. *Ann. Soc. Polonaise Math.* 20, 229—240 (1948).

L'aut. rappelle sa notion de surface intégrale contingente d'une équation $f(x, y, z, p, q) = 0$ et quelques propriétés, puis s'étend davantage sur celle de surface intégrale paratingente, c'est à dire dont le paratingent en chaque point est un plan tangent au cône élémentaire de l'équation. Il insiste sur une relation (par simple projection sur l'espace $Oxyz$) entre les intégrales au sens de Cauchy et les intégrales paratingentes d'une autre équation dans l'espace à 4 dimensions, avec fonction u et variables x, y, z , déduite du système $p = A(x, y, z, u); q = B(x, y, z, u)$, qui remplace $f = 0$. — Enfin l'aut. rappelle le rôle de cette notion dans la thèse récente de L lensa sur les systèmes triples orthogonaux. *Brélot (Grenoble).*

Manacorda, T.: Sulle discontinuità delle derivate del potenziale di semplice strato. I. II. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur.*, VIII. s. 5, 14—19, 143—147 (1948).

Unter Benutzung der Vektorhomographie von Burali-Forti, Marcolongo

und namentlich Burgatti wird nach einer Methode von B. Caldonazzo [Rend. Ist. Lombardo 75, 239—259 (1942); dies Zbl. 27, 69] das unstetige Verhalten der dritten Ableitungen des Potentials einer einfachen Flächenbelegung beim Durchgang durch die Fläche bestimmt. Es handelt sich dabei um ein beliebiges endliches reguläres Flächenstück, auf dem die Dichte stetig und mindestens zweimal differenzierbar vorausgesetzt wird. Die Unstetigkeiten drücken sich nicht nur in den geometrischen und materiellen Elementen der Fläche aus, sondern auch in deren Ableitungen. Die erhaltenen Formeln werden zum Schluß an einigen speziellen Beispielen illustriert.

V. Garten (Tübingen).

Greenberg, H. J.: The determination of upper and lower bounds for the solution of the Dirichlet problem. J. Math. Physics, Massachusetts 27, 161—182 (1948).

L'aut. cherche des valeurs approchées par excès et défaut, en un point fixe, de la solution du problème de Dirichlet pour une frontière C et une donnée f assez régulière. Il s'appuie sur le principe de Dirichlet et sur la propriété de Friedrichs que la solution est la seule fonction à une constante près qui minimise l'expression

$$\frac{1}{2} \int_D \text{grad}^2 v \, d\omega + \int_C f \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma$$

(v = harmonique dans le domaine D et assez régulière dans $D + C$); et il utilise l'expression classique d'une fonction harmonique en un point au moyen des valeurs de cette fonction et de sa dérivée normale sur le contour. Traitant d'abord le cas de la fonction de Green, l'auteur obtient grâce à des fonctions auxiliaires convenables, une approximation du type cherché, qu'on peut améliorer par itération (sans convergence assurée). La méthode vaut dans l'espace comme dans le plan, s'adapte au calcul des dérivées de la solution et de l'équation $\Delta w = \varphi$. — Application numérique au carré et à $\Delta w = -1$, où l'erreur relative obtenue est de quelques centièmes.

Brelot (Grenoble).

Lahaye, Edmond: Le problème de Cauchy et la résolution des certaines catégories d'équations linéaires du second ordre et d'ordres supérieurs à multiplicités caractéristiques décomposables. Acad. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8°, II. s. 21, Nr. 8, 80 S. (1949).

Im 1. Kapitel beschäftigt sich Verf. mit der Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung p -ter Ordnung für die gesuchte Funktion $u(x_1, \dots, x_m)$ von der Gestalt (1) $\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_p u = E$ mit dem Operator $\Delta_k = A_0^k + \sum_{i=1}^m A_i^k \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($k = 1, \dots, p$;

A_i^k und E gegebene Funktionen von x_1, \dots, x_m) unter den Anfangsbedingungen

(2) $\frac{\partial^i u}{\partial x_m^i} = K_i(x_1, \dots, x_{m-1})$ ($i = 0, 1, \dots, p-1$) auf der Punktmenge Γ_m^* :

$x_m = \Gamma_m(x_1, \dots, x_{m-1})$ (K_i, Γ_m gegebene Funktionen). Ist Γ_m^* zunächst keine Charakteristik von (1), so lassen sich neue geeignete Variable X_1, \dots, X_m derart einführen, daß man unter Beibehaltung des Baues von (1) und (2) Γ_m^* durch $X_m = 0$ ersetzen kann; hierauf gelingt es, für das Problem (1), (2) die Lösung in expliziter Form anzugeben. Ist weiter Γ_m^* eine Charakteristik, so wird noch eine weitere Punktmenge Γ_{m-1}^* : $x_{m-1} = \Gamma_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-2}, x_m)$ betrachtet, die keine Charakteristik von (1) ist, und die Bedingung (2) durch

(2') $u = K_0(x_1, \dots, x_{m-2}, x_m)$ auf Γ_{m-1}^* , $\frac{\partial^i u}{\partial x_m^i} = L_i(x_1, \dots, x_{m-1})$ auf Γ_m^*

($i = 0, 1, \dots, p-2$) ersetzt. Durch eine geeignete Variablentransformation treten jetzt an Stelle von Γ_{m-1}^* und Γ_m^* $X_{m-1} = 0$ und $X_m = 0$; die Lösung des Problems (1), (2') läßt sich ebenfalls explizit angeben. Schließlich werden auch noch drei Punktmengen, von denen zwei Charakteristiken sind, als „Träger“ für die Anfangs-

bedingungen betrachtet; diese lassen sich unter bestimmten Bedingungen über die A_i^k nach einer geeigneten Koordinatentransformation durch $X_{m-2} = 0$, $X_{m-1} = 0$, $X_m = 0$ ersetzen. Auch hier kann man die Lösungen explizit hinschreiben. — Im 2. Kapitel wird das Anfangswertproblem der Gleichung

$$(3) \quad \overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_p} u = \sum_{k_1=1}^m \dots \sum_{k_{p-1}=1}^m a_{k_1 \dots k_{p-1}} \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{p-1}}} + \dots \\ + \sum_{k_1=1}^m a_{k_1} \frac{\partial u}{\partial x_{k_1}} + Du + E$$

behandelt, wobei die $\overline{A_k}$ die A_k mit $A_0^k = 0$ bedeuten. Unter wesentlicher Benutzung der Lösungsformeln von (1) zeigt sich mit Hilfe sukzessiver Approximationen, daß die Gleichung (3) unter der Bedingung (2), falls Γ_m^* keine Charakteristik ist, in einem gewissen Bereich genau eine Lösung besitzt. Entsprechende Resultate werden dann auch unter den anderen Anfangsbedingungen des ersten Kapitels erhalten, vorausgesetzt, daß in (3) rechter Hand keine Ableitungen der Ordnung $p-1$ bzw. $p-1$ und $p-2$ auftreten.

Maruhn (Dresden).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Menger, Karl: The topology of the triangle inequality. Rev. Ci., Lima 50, 155—165 (1948).

Um die topologischen Konsequenzen aus der Dreiecksungleichung in Vektorräumen bequem zu isolieren, betrachtet Verf. sogenannte „trianguläre Vektorräume“, d. h. lineare Vektorräume $\{\mathfrak{x}\}$ mit einer reellen Norm $\nu(\mathfrak{x})$, welche lediglich die folgenden zwei Eigenschaften erfüllen soll: 1. Aus $\varrho \geq 0$ folgt $\nu(\varrho \mathfrak{x}) = \varrho \nu(\mathfrak{x})$ für alle Vektoren \mathfrak{x} . — 2. $\nu(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) \leq \nu(\mathfrak{x}) + \nu(\mathfrak{y})$ für zwei beliebige Vektoren \mathfrak{x} und \mathfrak{y} . Die Gesamtheit \mathfrak{N} der „Nullvektoren“, d. h. der Vektoren \mathfrak{n} mit $\nu(\mathfrak{n}) = 0$, heißt die Nullsphäre um Θ (Θ die Vektornull, d. h. $\mathfrak{x} + \Theta = \mathfrak{x}$ für alle \mathfrak{x}). Hinsichtlich der Gestalt der Nullsphäre um Θ findet Verf. (bei Beschränkung auf zwei Dimensionen) folgende Klassifikation: (A) \mathfrak{N} besteht nur aus Θ . — (B) Es gibt einen Vektor $\mathfrak{a}_1 \neq \Theta$, so daß \mathfrak{N} aus allen Vektoren $\varrho \mathfrak{a}_1$ besteht mit $\varrho \geq 0$. — (C) Es gibt zwei unabhängige Vektoren \mathfrak{a}_1 und \mathfrak{a}_2 , so daß \mathfrak{N} besteht aus den Vektoren $\varrho \mathfrak{a}_1$ und $\sigma \mathfrak{a}_2$ mit $\varrho \geq 0$ und $\sigma \geq 0$. — (D) Es gibt einen Vektor \mathfrak{a}_1 , so daß \mathfrak{N} aus allen Vektoren $\lambda \mathfrak{a}_1$ besteht mit $\lambda \geq 0$. — Daneben treten noch drei ausgeartete Fälle, in welchen \mathfrak{N} ein Winkelraum, eine Halbebene oder die ganze Ebene ist. — Der Fall (A) entspricht dem gewöhnlichen normierten Vektorraum. Ohne Rücksicht auf die Gestalt der Sphären, welche hier Kreise, Ellipsen oder ähnlich gestaltete Kurven sein können, ergibt sich nur eine einzige Topologie, die Verf. als elliptisch bezeichnet. Auch im Fall (B) gibt es im wesentlichen nur eine Topologie, die Verf. wegen der parabelähnlichen Gestalt ihrer Sphären parabolisch nennt. Im Fall (C) spricht Verf. in analoger Weise von einer hyperbolischen Topologie des Vektorraumes, und den Fall (D) nennt er lineare Topologie, weil die Sphären Geraden sind. Nur als topologische Räume betrachtet, sind die linearen und hyperbolischen Räume homöomorph, als topologische Vektorräume aber sind sie verschiedenartig.

Aumann (Regensburg).

Vulich, B. Z.: Konkrete Darstellung linearer halbgeordneter Räume. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 58, 753—756 (1947) [Russisch].

L'Au. détermine la structure d'un espace vectoriel ordonné dans lequel toute partie majorée a une borne supérieure. Soit d'abord X un tel espace admettant un élément unité, c'est-à-dire un élément 1 tel que $\inf(x, 1) > 0$ pour tout $x > 0$. Alors l'ensemble X_0 des x tels que $|x|$ soit majoré par un multiple de 1 est isomorphe à l'espace $C(Q)$ des fonctions finies et continues dans un espace compact Q . Cet espace Q n'est d'ailleurs pas quelconque, car l'adhérence de tout ensemble ouvert

dans Q doit encore être un ensemble ouvert. [Note du Réf.: on déduit aisément de cette propriété qu'aucun point non isolé de Q ne peut avoir un système fondamental dénombrable de voisinages.] Soit alors $C_\infty(Q)$ l'ensemble des fonctions continues dans Q , finies ou non, mais qui ne sont infinies que dans un ensemble rare. Alors on montre que si x_1 et x_2 sont deux fonctions de $C_\infty(Q)$, la somme $x_1(t) + x_2(t)$ tend vers une limite même aux points où x_1 et x_2 sont infinis de signes contraires; cela permet de définir $C_\infty(Q)$ comme espace vectoriel ordonné, et alors X est isomorphe à un sous-espace de $C_\infty(Q)$. Lorsque X n'a pas d'élément unité, on le représente comme somme directe d'espaces ayant un élément unité. L'Au. caractérise ensuite les ensembles bornés et la o -convergence dans $C_\infty(Q)$, et remarque que, dans $C_\infty(Q)$ on peut introduire une multiplication.

J. Dieudonné (Nancy).

Ruston, A. F.: A note on convexity in Banach spaces. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 157—159 (1949).

Ein reeller oder komplexer Banachraum B heißt streng konvex, wenn aus $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, $x, y \neq 0$, stets $x = cy$ folgt. Notwendig und hinreichend für strenge Konvexität ist jede der folgenden Bedingungen: (1) Ist $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$, so ist stets $\|\frac{1}{2}(x + y)\| < 1$, (2) Ist f ein lineares Funktional $\neq 0$, so gibt es stets höchstens ein $x_0 \in B$ mit $\|x_0\| = 1$ und $f(x_0) = \|f\|$. Ferner gilt: B ist dann und nur dann gleichmäßig konvex, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß für alle $x, y \in B$, $f \in B^*$, die die Bedingungen $\|x\| = 1$, $\|y\| \leq 1$, $\|x - y\| \geq \varepsilon$, $f(x) = \|f\|$ erfüllen, gilt $\Re\{f(y)\} \leq \|f\|(1 - \delta)$.

G. Köthe.

Michal, Aristotle D.: Differentiable infinite continuous groups in abstract spaces. Rev. Ci., Lima 50, 131—150 (1948).

Es sei Δ eine offene Menge eines Banachraumes E , deren Elemente eine Gruppe bilden und die Fréchet-Differentiale $\delta(\alpha\beta)$, $\delta(\alpha^{-1})$ seien gleichzeitig stetig für α, β , $\delta\alpha$, $\delta\beta$. Die Fredholmschen stetigen Kerne mit nichtverschwindender unendlicher Determinante bilden ein Beispiel bei der Multiplikation

$$\alpha\beta = \alpha(x, s) + \beta(x, s) + \int_a^b \beta(x, r) \alpha(r, s) dr.$$

Für diese unendlichdimensionalen kontinuierlichen Gruppen werden die erste und zweite Parametergruppe eingeführt, ihre linearen Differentialformen als gewisse Fréchet-Differentiale erklärt, daraus die verallgemeinerten Lieschen totalen Differentialgleichungen gebildet. Unter zusätzlichen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ergeben sich Analoga zu den Maurer-Cartanschen Gleichungen. Weitere invariante Differentialformen werden aufgestellt. Ohne Beweise.

G. Köthe.

Arnous, E.: Quelques applications de la théorie des groupes de transformations unitaires, en calcul des probabilités et en mécanique quantique. Rev. sci., Paris 85, 553—558 (1947).

Ce papier constitue un exposé didactique intéressant des applications de la théorie des groupes de transformations unitaires dans l'espace de Hilbert à celle des fonctions aléatoires stationnaires [Loève, C. r. Acad. Sci., Paris 220, 380—381 (1945)] et à la mécanique quantique [Arnous, Thèse, Paris 1946]. Des exemples simples et clairs sont tirés de la théorie quantique du moment cinétique, en particulier du théorème de Koenig.

Lichnerowicz (Strasbourg).

Friedrichs, K. O.: On the perturbation of continuous spectra. Commun. appl. Math., New York 1, 361—406 (1948).

Gegenstand ist die Störungstheorie von Operatoren $L + \varepsilon K$, wobei der ungestörte Operator L entweder ein rein kontinuierliches Spektrum besitzt, das sich über ein endliches oder unendliches Intervall I der λ -Achse erstreckt, oder ein gemischtes Spektrum, das speziell von der Form gewählt wird: kontinuierliches Spektrum über I , vermehrt um einen einzelnen Punkteigenwert, der im Inneren

von I liegt. Der ungestörte Operator wird dabei schon als „spektral zerlegt“ aufgefaßt, das heißt, er wirkt auf Elemente x , die (erster Fall) Funktionen von λ , λ in I , sind, und es ist $Lx = \lambda x(\lambda)$; oder (zweiter Fall) auf Elemente $x = \{x(\lambda), \zeta\}$, die aus einer Funktion von λ und einer Zahl ζ bestehen, und dann ist $Lx = \{\lambda x(\lambda), \lambda_0 \zeta\}$, wobei λ_0 offenbar Punkteigenwert von L zur Eigenfunktion $\{0, \zeta\}$ wird. Der gestörte Operator ist im ersten Falle $(L + \varepsilon K)x = \lambda x(\lambda) + \varepsilon \int_I k(\lambda, \mu) x(\mu) d\mu$ und im zweiten Fall $(L + \varepsilon F)x = \{\lambda x(\lambda), \lambda_0 \zeta\} + \varepsilon \left\{ f(\lambda) \zeta, \int_I \overline{f(\lambda)} x(\lambda) d\lambda \right\}$ mit fest gegebener Funktion $f(\lambda)$. In beiden Fällen dürfen die Funktionen von λ als Funktionswerte nicht nur komplexe Zahlen haben, sondern auch Elemente eines endlich- oder unendlich-dimensionalen Hilbertschen Raumes; dann sind Ausdrücke wie $\overline{x(\lambda)} y(\lambda)$ als innere Produkte in diesem Hilbertschen Raum aufzufassen. — Die Spektraldarstellung von $L + \varepsilon K$ wird bei endlichem I und zusätzlichen Voraussetzungen über $k(\lambda, \mu)$ geleistet durch Operatoren

$$U_\varepsilon x = x(\lambda) + \varepsilon i \pi r_1(\lambda, \lambda) x(\lambda) + \varepsilon \int_I \frac{r_2(\lambda, \mu)}{\mu - \lambda} x(\mu) d\mu \quad \text{mit}$$

$$(L + \varepsilon K) U_\varepsilon = U_\varepsilon L, \quad U_\varepsilon^* U_\varepsilon = U_\varepsilon U_\varepsilon^* = 1, \quad U_\varepsilon = 1 + \varepsilon U^{(1)} + \dots$$

Im Falle des Operators $L + \varepsilon F$ werden auch die Transformationen U_ε angegeben. Sie sind aber nicht mehr analytisch in ε . Während $L + \varepsilon F$ für $\varepsilon = 0$ den Punkteigenwert λ_0 besitzt, hat der gestörte Operator für $\varepsilon \neq 0$ keinen Punkteigenwert. Die formale Störungsrechnung kann also nur eine approximative Bedeutung haben, und diese wird aufgezeigt. Zu den Operatoren $L + \varepsilon K$ und $L + \varepsilon F$ wird die Heisenbergsche „ S -Matrix“ angegeben und gezeigt, wie dieser Operator S die Zustände einer Schrödingergleichung für $t = -\infty$ mit denen für $t = +\infty$ verknüpft. — Der Operator $L + \varepsilon K$ wird schließlich auch für unendliches Intervall I betrachtet, wobei an Stelle von $Lx = \lambda x(\lambda)$ der Operator $iDx = \frac{\partial x(\lambda)}{\partial \lambda}$ tritt. Die Arbeit ist bequem lesbar, weil der Autor sich auf Resultate einer früheren Arbeit [Math. Ann., Berlin 115, 249—272 (1938); dies. Zbl. 18, 70] stützen kann.

Rellick (Göttingen).

Hartman, Philip and Aurel Wintner: Töplerian (L^2)-bases. Trans. Amer. math. Soc. 63, 207—225 (1948).

Ist $\varphi(t)$ eine ungerade in $(0, \pi)$ periodische Funktion aus dem über $(0, \pi)$ gebildeten L^2 -Raum, so bildet die Folge $(1) \varphi(t), \varphi(2t), \dots, \varphi(nt), \dots$ eine L^2 -Basis, wenn jedes $f(t) \in L^2$ durch geeignete Linearkombinationen $\sum_1^k C_n \varphi(nt)$ im Sinne der Metrik in L^2 beliebig genau approximiert werden kann. (1) bildet eine Fourier- L^2 -Basis, wenn es zu jedem $f(t)$ eine Folge c_n gibt, so daß

$$\int_0^\pi |f(t) - \sum_{n=1}^k c_n \varphi(nt)|^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

gilt. Wie die Funktion $\varphi(t) = \sin t - \sin 2t$ zeigt, gibt es L^2 -Basen, die nicht Fourier- L^2 -Basen sind. Hat $\varphi(t)$ die Fourierreihe $\sum \varphi_m \sin mt$, so wird ihr die Dirichletreihe $\Phi(s) = \sum_1^\infty \varphi_n / n^s$ und die durch $\Phi^*(s) \Phi(s) = 1$ entsprechende Reihe $\Phi^*(s) = \sum \varphi_n^* / n^s$ zugeordnet. Es wird nun eine Anzahl von notwendigen und hinreichenden Bedingungen abgeleitet, wann (1) eine L^2 - bzw. Fourier- L^2 -Basis bildet. Einige seien angeführt: Notwendig und hinreichend für L^2 -Basis ist, daß die homogenen Gleichungen $\sum_{m=1}^\infty \varphi_m x_{nm} = 0$ im Hilbertschen Raum unlösbar sind; notwendig ist

$\varphi_1 \neq 0$, hinreichend $\varphi_1 \neq 0$ und $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j,k=m}^{\infty} |\varphi_j^* \varphi_k|^2 < \infty$; hinreichend ist $\varphi_1 \neq 0$ und $\sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{j,k=m}^{j>N} \varphi_j^* \varphi_k \right|^2 \rightarrow 0$ mit $N \rightarrow \infty$; notwendig ist, daß $\Phi(s)$ und $\Phi^*(s)$ absolut konvergent sind für $\sigma > \frac{1}{2}$ und dort $\Phi(s) \neq 0$, $\Phi^*(s) \neq 0$; hinreichend ist, daß $\sum_1^{\infty} |\varphi_m^*|^2 < \infty$ und $\Phi(s)$ für $\sigma > 0$ konvergiert und $\sup_{\sigma>0} |\Phi(s)| < \infty$; hinreichend ist, daß $\Phi^*(s)$ für $\sigma > 0$ konvergiert und $\sup_{\sigma>0} |\Phi^*(s)| < \infty$. Notwendig für Fourier- L^2 -Basis ist $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{d|n}^{d>k} \varphi_d^* \varphi_n/d \right|^2 \rightarrow 0$ mit $k \rightarrow \infty$, hinreichend ist $\varphi_1 \neq 0$, und daß $\Phi(s)$ und $\Phi^*(s)$ für $\sigma > 0$ konvergent sind und dort Funktionen darstellen mit $\sup_{\sigma>0} |\Phi(s)| < \infty$ und $\sup_{\sigma>0} |\Phi^*(s)| < \infty$.

G. Köthe (Mainz).

Praktische Analysis:

Zurmühl, Rudolf: Zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme nach dem Matrizenverfahren von Banachiewicz. Z. angew. Math. Mech. **29**, 76—84 (1949).

Verf. beschreibt unter Benutzung des Matrizenkalküls das von Banachiewicz zur Auflösung eines Systems linearer Gleichungen angegebene Verfahren und zeigt, wie unter sachgemäßer Anwendung der Rechenmaschine dabei gegenüber dem Gaußschen Schema eine wesentliche Verminderung der Schreibarbeit erzielt werden kann. Die Methode stimmt im wesentlichen mit der des schon seit langem viel angewandten abgekürzten Gaußschen Verfahrens überein. Für die Durchführung der Rechnung wird ein Schema mit Summenprobe gegeben, darauf hingewiesen, wie sich die Rechenarbeit bei symmetrischer Koeffizientendeterminante vereinfacht, und gezeigt, wie man durch Spaltenvertauschung immer eine ausreichende Rechengenauigkeit erzielen kann. Das Verfahren läßt sich auch zur Berechnung von Einflußzahlen, also der Kehrmatrix, verwenden.

Willers (Dresden).

Neumann, John von and H. H. Goldstine: Numerical inverting of matrices of high order. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 1021—1099 (1947).

Verff. wollen den Einfluß der Abrundungsfehler bei der Berechnung reziproker Matrizen und damit bei der Auflösung größerer numerischer Gleichungssysteme nach dem Eliminationsverfahren abschätzen. Zunächst wird eine Übersicht der verschiedenen Fehlerquellen gegeben. Dann wird das Rechnen mit „Digitalzahlen“ (digital number) untersucht. Eine Digitalzahl \bar{x} ist eine im Dezimalsystem (allgemein im β -al-System) s -stellige Zahl, die mit 0, ... beginnt und ein Vorzeichen hat. Summe und Differenz zweier Digitalzahlen \bar{x}, \bar{y} haben die gewöhnliche Bedeutung, aber Produkt und Quotient zweier Digitalzahlen werden auf s Dezimalstellen abgerundet, als „Pseudoprodukt“ und „Pseudoquotient“ bezeichnet und $\bar{x} \times \bar{y}$ bzw. $\bar{x} \div \bar{y}$ geschrieben. Ausgehend von den Grundgleichungen $|\bar{x} \times \bar{y} - \bar{x} \bar{y}| \leq \frac{1}{2} \beta^{-s}$ und $|\bar{x} \div \bar{y} - \bar{x}/\bar{y}| \leq \frac{1}{2} \beta^{-s}$ wird eine Algebra für das Rechnen mit Digitalzahlen und das mögliche und das im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheoretischen Streuungsrechnung wahrscheinliche Anwachsen der Abrundungsfehler entwickelt. Sodann wird das Gaußsche Eliminationsverfahren in Elementarschritte zerlegt und hinsichtlich der Abrundungsfehler nach der vorangegangenen Theorie untersucht. Nach langwierigen Rechnungen wird das Ergebnis zunächst für reelle, symmetrische, quadratische, definite Matrizen $A = (a_{ij})$, dann für beliebige (aber stets nichtsinguläre) Matrizen erhalten. Mit Hilfe der „oberen Schranke“ $|A|$ und der „unteren Schranke“ $|A|_l$ (es ist $|A|$ das kleinste c , so daß $|A\xi| \leq c|\xi|$ für alle Vektoren ξ gilt, und $|A|_l$ das größte c mit $|A\xi| \geq c|\xi|$) lautet das Resultat $|\bar{2}^{q_0} \bar{A} \bar{W}_0 - J| \leq (1,98 + 10,28\lambda) \alpha$. Dabei ist A die Matrix (\bar{a}_{ij}) der

zu a_{ij} gehörigen Digitalzahlen, $|A| = \lambda$, $|A|_i = \mu > 0$, $\alpha = n^2 \beta^{-s}/\mu$ (n = Reihenzahl von A), J die Einheitsmatrix, q_0 durch $2^{\alpha} \leq \frac{8}{1 - 1,78\alpha} \frac{1}{\mu}$ festgelegt, W_0 entspricht der reziproken Matrix. Nach Abzählung der erforderlichen Rechenoperationen wird eine kritische Schranke aufgestellt: $n < 0,15\beta^{1/s}$; also z. B. für $\beta^s \sim 10^{10}$ soll $n < 50$ sein, d. h. bei zehnstelliger Rechnung soll die Zeilenzahl der Matrix 50 und z. B. bei zwölfstelliger Rechnung soll n 150 nicht übersteigen. *Collatz.*

Pflanz, Erwin: Zur Bestimmung reeller Nullstellen von reellen Funktionen einer Variablen. *Z. angew. Math. Mech.* **29**, 85—91 (1949).

In der *Z. angew. Math. Mech.* **28**, 114—122 (1948); dies. Zbl. **30**, 36 hat Verf. eine Verallgemeinerung des kombinierten Verfahrens von Newton und der regula falsi gegeben, indem er die Funktion $f(x)$, deren Nullstelle gesucht wird, in einem Gebiet der Breite $2h$, in dem nur eine Nullstelle liegt, zwischen ein oberes und ein unteres Polynom einschließt, daß mit $f(x)$ an den Grenzen im Funktionswert und den ersten Ableitungen übereinstimmt. Der Unterschied der Nullstellen dieser Polynome ist z. B. für den Fall, daß die beiden Endordinaten und je an einem Ende die erste Ableitung die gleichen sind, in h von dritter Ordnung. Durch Bildung von $v(x) = (1 + ax\xi + b\xi^2) f(x)$, wo $\xi = x - (x_1 + x_2)/2$ ist, und Bestimmung der Konstanten aus $v_m''' = 0$ und $v_m^{(4)} = 0$ läßt sich erreichen, daß dieser Unterschied proportional der 5. Potenz in h wird. Wenn die ursprünglich gemachte Voraussetzung, daß f'' in dem in Betracht kommenden Gebiet monoton sein soll, nicht erfüllt ist, läßt sich das Einschließungsverfahren durch Übergang zu einem geeigneten Gleichungssystem doch durchführen. Auch bei Vertauschung der Variablen läßt sich bei Benutzung von in y quadratischen Polynomen die gesuchte Nullstelle eingrenzen. Schließlich werden die Untersuchungen auf Polynome dritten Grades, die an den Enden und in der Intervallmitte mit $f(x)$ und an je einem Ende mit $f'(x)$ übereinstimmen, übertragen. In allen Fällen werden die für die Rechnung fertigen Endformeln gegeben. *Willers (Dresden).*

Fischer, Johannes: Bestimmung eines Funktionsverlaufes durch nomographische Rechnung. *Z. angew. Math. Mech.* **29**, 55—56 (1949).

Verf. zeigt am Beispiel der Funktion $y = \frac{1}{1 + a^{1/x}}$, daß deren Funktionswerte und damit ihr Verlauf leicht durch ein geeignetes Nomogramm ermittelt werden können, hier speziell durch ein Nomogramm mit 3 parallelen, gleichabständigen, geraden oder mit 3 durch einen Punkt gehenden geraden Leitern.

W. Meyer zur Capellen (Aachen).

Rubbert, F. K.: Quadratische Interpolation bei großen Differenzen. *Z. angew. Math. Mech.* **29**, 54 (1949).

Die gewöhnlichen Interpolationsformeln versagen bei Funktionswerten mit großen Differenzen. Verf. gibt zu diesem Zwecke übersichtliche Formelpaare für die direkte und die inverse quadratische Interpolation an. Diese liefern Werte, die den gesuchten Funktionswert einschließen, und enthalten nur die gegebenen Funktionswerte.

W. Meyer zur Capellen (Aachen).

Radon, Johann: Zur mechanischen Kubatur. *Mh. Math., Wien* **52**, 286—300 (1948).

Den Gaußschen Integrationsformeln entsprechende geeignete Kubaturformeln

$$\iint_D F(x, y) dx dy \approx \sum_{k=1}^v \mu_k F(x_k, y_k)$$

lassen sich in gewissen Fällen — auch für beliebige Integrationsbereiche D — aufstellen, und zwar ist $v = 7$ der kleinste in Betracht kommende Wert. Die betreffenden Formeln und Fehlerabschätzungen werden aufgestellt für ein Dreieck sowie für ein achsensymmetrisches bzw. in ein solches affin transformierbares Integrationsgebiet. *Nyström (Helsinki).*

Dixon, W. J.: Table of normal probabilities for intervals of various lengths and locations. *Ann. math. Statist., Ann Arbor* **19**, 424—426 (1948).

Erläuterungen über Herstellung und praktische Verwendung der vom Veri. berechneten, aber nicht publizierten Tabelle des Integrals $\int_{x-l/2}^{x+l/2}$ der Normalverteilung für $x = 0; 0,1; \dots; 5,0$ und $l = 0; 0,1; \dots; 10,0$. *M. P. Geppert.*

Frucht, Roberto: Über die numerische Berechnung des Umfangs einer Ellipse. *Math. Notae, Rosario* **7**, 212—217 (1947) [Spanisch].

Verf. vergleicht verschiedene Näherungsformeln für den Umfang einer Ellipse, wie sie sich durch Reihenentwicklung oder genäherte Quadratur aus dem elliptischen Integral für den Ellipsenbogen gewinnen lassen, hinsichtlich ihrer Genauigkeit durch Gegenüberstellung mit den Werten aus den Jahnke-Emdeschen Tafeln.

Aumann (Regensburg).

Levi, Beppo: Über die genäherte Berechnung von Integralen. *Math. Notae, Rosario* **7**, 218—229 (1947) [Spanisch].

Der in vorstehender Arbeit von R. Frucht angegebene Näherungswert $\pi(4 + \sqrt{25 - 22k^2})/18$ für die Bogenlänge eines Ellipsenquadranten (große Achse = 1, numerische Exzentrizität = k) wird hinsichtlich seiner Genauigkeit bei verschiedenen k -Werten einer eingehenden mathematischen Analyse unterzogen.

Aumann (Regensburg).

Faedo, Sandro: Sul metodo di Ritz e su quelli fondati sul principio dei minimi quadrati per la risoluzione approssimata dei problemi della fisica matematica. *Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. 6*, 73—94 (1947).

Verf. behandelt das Problem $L(y) = f(x)$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$, wo $L(y)$ einen selbstadjungierten Differentialoperator zweiten Grades darstellt, mit Hilfe der Variationsmethode und des Ritzschen Verfahrens. Er bezieht sich auf eine Arbeit von Picone, in welcher hinreichende Konvergenzbedingungen und für die Annäherung mit einer gewissen Funktionenfolge auch eine Fehlerabschätzung angegeben ist. Mit dieser obengenannten Fehlerabschätzung zeigt sich die Variationsmethode der von Ritz überlegen, insofern als erstere eine viel bessere Konvergenz gibt. Verf. zeigt, daß auch für andere Funktionenfolgen analoge Fehlerabschätzungen mit Hilfe des von Picone angegebenen Verfahrens gewonnen werden können. Durch geeignete Wahl dieser Funktionenfolgen wird auch für das Ritzsche Verfahren eine Abschätzung erhalten, welche für sie eine ebensogute Konvergenz gibt wie die Variationsmethode.

Wolf Gross (Rom).

Kovner, S. S. und D. K. Žak: Berechnung der Potenzen der Operatoren von Liebmann und Geršgorin und ihre Anwendung zur maschinellen Integration von Gleichungen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 58*, 5—8 (1947) [Russisch].

Für die angenäherte Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie in der Ebene nach dem Differenzenverfahren in der Form des Liebmannschen Mittelungsverfahrens (Näherungswerte $u_{ik}^{(v)}$ in der v -ten Näherung an der Stelle i, k eines quadratischen Netzes) nach

$$u_{ik}^{(v+1)} = \frac{1}{4} [u_{i+1,k}^{(v)} + u_{i,k+1}^{(v)} + u_{i-1,k}^{(v)} + u_{i,k-1}^{(v)}]$$

berechnen die Verf. die Potenzen des Liebmannschen Operators, d. h. sie drücken $u_{i,k}^{(v+2)}$, $u_{i,k}^{(v+3)}$, ... durch die $u_{l,m}^{(v)}$ aus und veranschaulichen sie durch Zahlensterne, bei denen an der Stelle l, m der Faktor von $u_{l,m}^{(v)}$ angeschrieben ist. Kommt man in die Nähe des Randes, so modifizieren sich die Sterne in leicht angebbarer Weise. Auch für das Gerschgorinsche Verfahren

$$u_{i,k}^{(v+1)} = \frac{1}{20} [4(u_{i+1,k}^{(v)} + u_{i,k+1}^{(v)} + \dots) + (u_{i+1,k+1}^{(v)} + u_{i+1,k-1}^{(v)} + \dots)]$$

werden entsprechende Sterne angegeben. Diese Formeln sind von besonderem

Nutzen, wenn man die Iterationen maschinell mit Hilfe von Lochkarten ausführt. Der schematische Arbeitsprozeß mit Lochungen, Sortierungen, Umgruppierungen usw. wird beschrieben und empfohlen, die Formel zu verwenden, die $u_{i,k}^{(v+5)}$ aus den $u_{i,m}^{(v)}$ liefert; die Arbeit für die Iterationen wird dabei gegenüber der ursprünglichen Art nach Liebmann wesentlich verringert. *Collatz* (Hannover).

Vajnštejn (Weinstein), B. K. und Z. G. Pinsker: Anwendung der harmonischen Analyse in der Elektronographie. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 64, 53—56 (1949) [Russisch].

Stelson, H. E.: Note on the approximate solution of an oblique triangle without tables. Amer. math. Monthly 56, 94—95 (1949).

● Sassenfeld, M. H. und H. F. A. Tschunko: Mathematische Tafeln für Mathematiker, Naturwissenschaftler, Ingenieure. Walldorf b. Heidelberg: Fr. Lamadé-Verlag 1949. VIII, 34 S. 5,75 DM.

● Dale, John Borthwick: Five-figure tables of mathematical functions: comprising tables of logarithms, powers of numbers, trigonometric, elliptic and other transcendental functions. 2. ed. London: Edward Arnold and Co., 1949, VIII, 121 p.

● Gravelius, H.: Vierstellige Tafeln für logarithmisches und numerisches Rechnen. Ausgabe A mit Sechstheilung des Grades. 3. Aufl. Bonn: Ferd. Dümmlers Verlag 1948. 32 S. 2.50 DM brosch.

● Peters, J.: Dreistellige Tafeln für logarithmisches und numerisches Rechnen. 2. Aufl. Bonn: Ferd. Dümmlers Verlag 1948. 36 S. 2,40 DM. brosch.

● Tables of spherical Bessel functions. Vol. 1. Prepared by the Mathematical Tables project, National Bureau of Standards. New York: Columbia University Press. 1947. XXVIII, 379 p. \$ 7.50.

● Tables of the Bessel functions of the first kind of orders zero, one, two, and three. (The Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, vols. 3—4.) Cambridge: Harvard University Press; London: Oxford University Press 1947. \$ 20.00.

Klassische theoretische Physik.

Mechanik:

Castoldi, Luigi: I „movimenti astratti“ di Appell e un nuovo esempio di vincoli anolonomi non lineari nelle velocità. Boll. Un. mat. Ital., III. s. 2, 221—228 (1947).

Nachdem Verf. das von Appell angegebene Beispiel als unzureichend nachgewiesen hat, gibt er ein neues Beispiel für ein mechanisches System mit nicht-linearen, anholonomen Bindungen in den Geschwindigkeiten. *Graffi*.

Rakhmatulin (Rachmatulin), K. A.: Impact on a flexible cord. Priklad. Mat. Mech., Moskva 11, 379—382 u. engl. Zusammenfassg. 382 (1947) [Russisch].

Für einen unendlich langen, vollkommen biegsamen Faden, der keinen Kräften unterworfen sei, werden im ebenen Falle Sonderlösungen in der Weise gesucht, daß die Verhältnisse der Verschiebungen zur Zeit nur Funktionen von dem Verhältnis der Lagrangeschen Koordinate zur Zeit sein sollen. Die Dehnung des als elastisch angenommenen Fadens kann dann auch nur von dieser Variablen abhängen. Es besteht eine lineare Beziehung zwischen den Verschiebungen, der Zeit und der Lagrangeschen Koordinate. Das soll nach Verf. bedeuten, daß die Form des Fadens in jedem Zeitpunkt durch geradlinige Abschnitte gebildet ist, was Ref. bezweifelt. Anwendungen auf den transversalen Schlag gegen den Faden. *Hamel* (Landshut/Bayern).

Melchior, Paul: Sur la dynamique des solides. II. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. s. 34, 779—784 (1948).

L'A. emploie la méthode variationnelle de Th. de Donder [Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. s. 28, 8—16 (1942)] pour obtenir, sous une forme tensorielle nouvelle,

les équations classiques de la dynamique du solide libre. Ces équations sont aussi mises sous forme canonique et l'équation de Jacobi associée est formée.

Lichnerowicz (Strasbourg).

Melchior, Paul: Dynamique d'un solide à liaisons non holonomes d'après la méthode variationnelle de Th. de Donder. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. s. 34, 785—788 (1948).

La méthode précédente (voir ref. ci-dessus) est appliquée au problème du cerceau qui roule et pirote sans glisser sur un plan horizontal. *Lichnerowicz*.

Egervary, E.: On a new form of the differential equations of the problem of three bodies. Hung. Acta Math. 1, 1—18 (1947).

Die Arbeit bringt in formal durchsichtiger Weise eine Reduktion des Dreikörperproblems durch Anwendung von Betrachtungen aus der Kreiseltheorie. Als Variable werden die Koordinaten der Schraubengeschwindigkeit ω_{ij} des Hauptachsensystems im Schwerpunkt der drei Körper eingeführt, sowie relativ zu diesem Koordinatensystem drei weitere von Radau eingeführte Variable q_1, q_2, q_3 . Setzt man die Gesamtmasse $I^{00} = \sum m = M$ und die Trägheitsmomente

$$I^{11} = \sum m x^1{}^2 = M q_1^2, \quad I^{22} = \sum m x^2{}^2 = M q_2^2,$$

so ist bei der Transformation $x^1/q_1 = x^1, x^2/q_2 = \bar{x}^2$ das Bild $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ der drei Massenpunkte bis auf eine Drehung in der Ebene um den Ursprung (= Schwerpunkt) durch die Massen m_1, m_2, m_3 bestimmt. $q_3 (= \alpha)$ sei etwa der Polärwinkel von \bar{P}_3 . Dann ist die Lagrangesche Funktion des Systems in der Bezeichnungsweise des Ref. [dies. Zbl. 22, 85] von der Form

$$L = T + V = \sum_{hk} I^{hk} \omega_{hk} + \sum_{(hk)} \mu^{hk} \omega_{hk} + T' + V,$$

wo außer den oben genannten Trägheitsmomenten als einzige nicht verschwindende relative Impulskoordinate $\mu^{12} = 2 M q_1 q_2 \dot{q}_3$ eingeht, ferner die relative kinetische Energie $T' = \frac{1}{2} M (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + (q_1^2 + q_2^2) \dot{q}_3^2)$. Die Kräftefunktion ist von der Gestalt $V = V(q_1, q_2, q_3)$. Außer dem System der sechs kinematischen Gleichungen erster Ordnung bekommt der Verf. sechs Gleichungen erster Ordnung für die ω_{ij} , die in Erweiterung der entsprechenden Gleichungen für den starren Körper hingeschrieben werden können. Dazu kommen drei Lagrangesche Differentialgleichungen, je von der zweiten Ordnung in den generalisierten Koordinaten q_i , also ein System sechster Ordnung. Letztere und die drei auf die Winkelgeschwindigkeit $\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12}$ ($= \omega_1, \omega_2, \omega_3$) bezüglichen erweiterten Eulerschen Gleichungen bilden das System neunter Ordnung, das sich abspaltet und durch das Energieintegral, das Integral der Erhaltung des Impulsmomentes in der Bahnebene sowie durch die Elimination der Zeit auf die sechste Ordnung reduziert werden kann. — Diese Methode geht elementar vor, vermeidet kanonische Transformationen, ist gleich den andersartigen Methoden von F. D. Murnaghan sowie von van Kampen und A. Wintner [Amer. J. Math. 58, 851—863 (1936); 59, 635—654 (1937); dies. Zbl. 15, 181; 17, 62] völlig symmetrisch in den drei Massenpunkten und gibt leichter als etwa der von E. Kähler [Math. Z. 24, 743—758 (1926)] befolgte andersartige Weg das explizite Resultat. Die gefundenen Differentialgleichungen sind sehr geeignet zur Behandlung der Lagrangeschen Dreieckslösungen des Dreikörperproblems. Den Schluß bildet eine Anwendung auf die von Sokolov [Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 46, 99 (1945)] entdeckten neuen Lösungen für Anziehungskräfte, die der dritten Potenz der Entfernungen proportional sind. *E. Hölder* (Leipzig).

Rankin, R. A.: The mathematical theory of the motion of rotated and unrotated rockets. Philos. Trans. R. Soc. London A 241, 457—585 (1949).

Ein sehr allgemeine und tief schürfende Untersuchung über die Bewegung einer Rakete während der Dauer des Abbrennens der Ladung unter Berücksichtigung der Schwere, des Windes, der Startfehler und des Einflusses kleiner Unsymmetrien.

Einige Vereinfachungen müssen natürlich vorgenommen werden. So die Festigkeit des Brennstoffes bis zum Moment der Entzündung, so die Annahme eines unveränderlichen Angriffspunktes der Reaktion des ausströmenden Gases, so die andauernde Kleinheit der Abweichung von der Geraden, was wieder mit der Annahme einer kurzen Brenndauer zusammenhängt. Im Anfang werden die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung eines sonst starren Körpers abgeleitet, der dauernd Materie verliert. Dabei ist noch besonders zu beachten, daß sich infolge der Änderung der Dichte auch die Trägheitshauptachsen ändern können. Es ist unmöglich, in diesem Referat genauer auf die Einzelheiten einzugehen. Das Inhaltsverzeichnis umfaßt allein vier Spalten des großen Formates, das Verzeichnis der benutzten Symbole fast sechs Spalten. Trotz der großen Mannigfaltigkeit gelingt es Verf., einige der oben genannten Einflüsse in konkreten Fällen durchzurechnen und zeichnerisch darzustellen (Fig. 6—15). Bemerkenswert und von allgemeiner Bedeutung ist eine Tafel von Funktionen, die mit den Fresnelschen zusammenhängen. *Hamel*.

Elastizität. Plastizität. Akustik:

Gleyzal, A.: A mathematical formulation of the general continuous deformation problem. *Quart. appl. Math.* **6**, 429—437 (1949).

L'A. donne ici un exposé très clair de l'application des méthodes tensorielles au problème général de la déformation des milieux continus. Le milieu envisagé étant rapporté à des coordonnées curvilignes (x^i) liées aux particules, le ds^2 de l'espace s'écrit: $ds^2 = g_{ij}(x^k, t) dx^i dx^j$, où g_{ij} est le tenseur de déformation. Les lois reliant les tensions et les déformations finies peuvent toujours être exprimées par des équations tensorielles reliant un tenseur de tension σ_{ij} et le tenseur de déformation. Le cas des déformations infinitésimales est aussi étudié en liaison avec le tenseur fondamental g_{ij} . L'A. traite enfin explicitement deux exemples usuels et en déduit des extensions aux déformations finies des modules de Young et de Poisson. *Lichnerowicz* (Strasbourg).

Rădulet, Remus: Sur les tensions fictives équivalentes aux actions pondéromotrices des champs physiques. *Bull. Sci. Techn. Polytechn. Timișoara* **13**, 54—68 (1948).

Verf. betrachtet ein allgemeines Kontinuum, in dem ein Kraftfeld mit der Feldstärke \mathfrak{A} besteht, welche auf das Kontinuum eine bestimmte Kraftdichte \mathfrak{E} ausübt. Verf. sucht nun denjenigen Spannungstensor, dessen Divergenz diese Kraftdichte liefert. Er löst diese Aufgabe unter Verwendung allgemeiner Symmetriebetrachtungen und kommt dabei zu einer Darstellung für den Spannungstensor, der zwei willkürlich wählbare skalare Funktionen des Betrages der Feldstärke enthält. Verf. spezialisiert seine Überlegungen auf die mechanischen Spannungen in elastischen Medien, auf die Kraftwirkungen in einer ausgedehnten gravitierenden Materie und auf den Spannungstensor im elektromagnetischen Feld. Die so erhaltenen Resultate sind mit den in diesen Spezialfällen bekannten identisch. *F. Sauter* (Göttingen).

Mitra, D. N.: On the flexure problem for some boundaries. *Bull. Calcutta math. Soc.* **40**, 173—182 (1948).

Die von S. Ghosh [dies Zbl. **30**, 247] zur Lösung des reinen Biegeproblems entwickelte funktionentheoretische Methode wird vom Verf. auf drei spezielle Biegeprobleme angewandt: der Querschnitt eines isotropen elastischen Zylinders wird 1. von der Inversen einer Ellipse bezüglich ihres Mittelpunktes; 2. von zwei orthogonalen Kreisbögen desselben Halbmessers; 3. von einer Schleife der Bernoullischen Lemniskate gebildet. Das letzterwähnte Problem war von Stevenson bereits 1938 nach einer anderen Methode gelöst worden [vgl. Stevenson, *Philos. Trans. R. Soc. London A* **237**, 161—229 (1938); dies Zbl. **19**, 229]. *V. Garten*.

Turton, F. J.: The theorem of four moments, with applications in the theory of plane structures. *Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics*, London, VII. s. 38, 251—267 (1947).

Verf. verallgemeinert die Clapeyronsche Gleichung der 3 Momente, indem er eine Beziehung zwischen den 4 Biegemomenten herleitet, die die Endmomente zweier angrenzender Felder eines durchlaufenden Trägers darstellen. Dabei ist aber die gewonnene Beziehung viel allgemeiner anwendbar, denn sie gilt für irgend zwei an einem gemeinsamen Ende steif verbundene Balken einer ebenen Konstruktion und zwar gleichgültig, ob an dieser Stelle weitere Stäbe angeschlossen sind oder nicht. Nach Herleitung dieser Beziehung, wobei der Einfluß des Schubes auf Biegemoment und Verformung vernachlässigt wird, zeigt Verf. Anwendungen auf einfache Konstruktionen, wie Tanks und Portale. (§ 2.) Für kompliziertere Rahmenkonstruktionen, wie sie im Eisenbetonbau vorkommen, wird dann im § 3 eine praktische Rechenvorschrift angegeben, wobei Verf. für diejenigen Terme, die die Belastungen und Verformungen charakterisieren, vorteilhafterweise dimensionslose Zahlen einführt, die er Momenten-, Last- und Neigungsziffern nennt. Praktische Rechenschemen unterstützen in übersichtlicher Weise den langwierigen Rechnungsgang. Weiterhin werden für besondere Fälle, wie nicht steife Verbände oder fehlende Vertikal- bzw. Horizontalglieder eines Stockwerkrahmens, die Möglichkeiten einer Reduktion der simultanen Lösungsgleichungen aufgezeigt. Ferner wird die Anwendung des Verfahrens bei Windbelastung und Säuleneinspannung und schließlich bei Ermittlung der Sekundärspannungen der Konstruktionen aufgezeigt.

Karas (Darmstadt).

Ghizzetti, Aldo: Ricerche analitiche sul problema dell'equilibrio di una piastra indefinita a forma di striscia, incastrata lungo i due lati. *Rend. Mat. sue Appl.*, Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. 6, 145—187 (1947).

Verf. behandelt das Problem

$$(1) \quad \Delta u = F(x, y); \quad u(0, y) = u(1, y) = 0; \quad u_x(0, y) = u_x(1, y) = 0,$$

welches die Biegung einer Platte in Form eines unendlichen beiderseitig eingespannten Streifens mit irgendwie verteilter Ladung darstellt. Die Lösung wird formal mit Hilfe der Fourierschen Integraltransformation erhalten. Um die Existenz der Lösung zu sichern, genügt, wie Verf. nach mühsamer Diskussion des Verhaltens der Greenschen Funktion zeigt, daß $F(x, y)$ einer Hölderschen Bedingung genügt und $e^{-\beta_1(y)} F(x, y)$ summierbar ist; β_1 stellt den imaginären Teil der kleinsten Wurzel der transzendenten Gleichung $\text{Sh}^2 \lambda - \lambda^2 = 0$ dar. Unter gewissen Einschränkungen sichert diese letztere Bedingung auch die Eindeutigkeit der Lösung. Es wird dann eine Konstruktionsmethode der Greenschen Funktion gegeben, welche der Spiegelungsmethode für das Problem $\Delta u = 0$ analog ist. Endlich wird eine Reihenentwicklung für sie angegeben, welche nach den Eigenlösungen des Problems (1) mit $F = 0$ fortschreitet.

Wolf Gross (Rom).

Sengupta, H. M.: On the bending of an elliptic plate under certain distribution of load. III. *Bull. Calcutta math. Soc.* 40, 53—63 (1948).

Verf. hat in derselben Zeitschrift 17—35 [dies. Zbl. 30, 417] die am Rande eingespannte Ellipsenplatte berechnet, wenn die Last in einem beliebigen Punkte zwischen den Brennpunkten angreift. In der vorliegenden Arbeit ist die Last auf einen beliebigen Teil der Strecke zwischen den Brennpunkten auf die Längeneinheit bezogen konstant verteilt. Die Abszissen der Endpunkte der belasteten Strecke werden mit x_2 und x_1 bezeichnet. Das partikuläre Integral

$$-\frac{W}{16\pi D \{x_1 - x_2\}} \int_{x_2}^{x_1} \{(x - x')^2 + y^2\} \ln \frac{4}{c^2} \{(x - x')^2 + y^2\} dx'$$

wird in elliptischen Koordinaten ausgerechnet.

Konrad Ludwig (Hannover).

Woinowsky-Krieger, S.: Berechnung einer auf elastischem Halbraum aufliegenden unendlich erstreckten Platte. *Ingenieur-Arch.* 17, 142—148 (1949).

Die Biegesteifigkeit wird mit D bezeichnet. Im Abstände r vom Angriffspunkte der Last P ist die Senkung $w = \frac{l^2 P}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{J_0 \{\lambda r/l\}}{1 + \lambda^3} d\lambda$ und der Druck

zwischen Platte und Halbraum $q = \frac{P}{2\pi l^2} \int_0^\infty \frac{\lambda J_0 \{\lambda r/l\}}{1 + \lambda^3} d\lambda$. Im Angriffspunkte

der Last ist $w\{0\} = \frac{l^2 P}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{1 + \lambda^3} = \frac{l^2 P}{\sqrt[3]{27} D} = 0,192 \frac{l^2}{D} P$

und $q\{0\} = \frac{P}{2\pi l^2} \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{1 + \lambda^3} = \frac{P}{\sqrt[3]{27} l^2}$.

Wenn der Halbraum nicht elastisch, sondern nach Winkler und Zimmermann $q = Kw$ ist, erhält man die Lösung von Hertz für die schwimmende Platte

$$w = \frac{l_1^2 P}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{\lambda J_0 \{\lambda r/l_1\}}{1 + \lambda^4} d\lambda = \frac{l_1^2 P}{4 D} \operatorname{Re} H_0^{(1)} \left\{ \frac{r}{l_1} \sqrt{i} \right\}, \quad l_1 = \sqrt[4]{\frac{D}{K}}.$$

Im Angriffspunkte der Last ist $w\{0\} = l_1^2 P/8D$ und $q\{0\} = P/8l_1^2$. Die Senkung auf dem elastischen Halbraum wird auf die der schwimmenden Platte zurückgeführt.

$$\int_0^\infty \frac{J_0 \{\lambda r/l\}}{1 + \lambda^3} d\lambda = \int_0^\infty \frac{\lambda J_0 \{\lambda r/l\}}{1 + \lambda^4} d\lambda + \int_0^\infty \frac{\{1 - \lambda\} J_0 \{\lambda r/l\}}{\{1 + \lambda^3\} \{1 + \lambda^4\}} d\lambda.$$

Das letzte Integral wird von 0 bis 4 nach der Simpsonschen Regel ausgewertet;

der absolute Rest ist wegen $|J_0| < 1$ kleiner als $\int_4^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^6} = \frac{1}{5 \cdot 4^5}$.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\lambda J_0 \{\lambda r/l\}}{1 + \lambda^3} d\lambda &= \int_0^\infty \frac{J_0 \{\lambda r/l\}}{1 + \lambda^2} d\lambda + \int_0^\infty \frac{\{\lambda - 1\} J_0 \{\lambda r/l\}}{\{1 + \lambda^2\} \{1 + \lambda^3\}} d\lambda, \\ \int_0^\infty \frac{J_0 \{\lambda r/l\}}{1 + \lambda^2} d\lambda &= \frac{\pi}{2} \left\{ J_0 \left(\frac{r}{l} i \right) + i H_0 \left(\frac{r}{l} i \right) \right\}. \end{aligned}$$

An jeder Längeneinheit eines Kreises $r = \text{constans}$ greift die Querkraft

$$\begin{aligned} & - \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{l} \int_0^\infty \frac{J_1 \{\lambda r/l\}}{1 + \lambda^3} d\lambda \right\} \text{ an.} \\ \int_0^\infty \frac{J_1 \{\lambda r/l\}}{1 + \lambda^3} d\lambda &= \int_0^\infty \frac{J_1 \{\lambda r/l\}}{\lambda \{1 + \lambda^2\}} d\lambda - \int_0^\infty \frac{\{1 - \lambda\} J_1 \{\lambda r/l\}}{\lambda \{1 + \lambda^2\} \{1 + \lambda^3\}} d\lambda, \\ \int_0^\infty \frac{J_1 \{\lambda r/l\}}{\lambda \{1 + \lambda^2\}} d\lambda &= \frac{\pi}{2} \left\{ -i J_1 \left(\frac{r}{l} i \right) + H_1 \left(\frac{r}{l} i \right) \right\}. \end{aligned}$$

Wenn die Last auf den Umfang des Kreises mit dem Radius q auf die Längeneinheit bezogen konstant verteilt ist, folgt auf elastischem Halbraum

$$w = \frac{l^2 P}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{J_0 \{\lambda q/l\} J_0 \{\lambda r/l\}}{1 + \lambda^3} d\lambda, \quad q = \frac{P}{2\pi l^2} \int_0^\infty \frac{\lambda J_0 \{\lambda q/l\} J_0 \{\lambda r/l\}}{1 + \lambda^3} d\lambda$$

und nach der Annahme Winklers $w = \frac{l_1^2 P}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{\lambda J_0 \{\lambda q/l_1\} J_0 \{\lambda r/l_1\}}{1 + \lambda^4} d\lambda$.

Wenn die Last auf den Inhalt des Kreises mit dem Radius c auf die Flächeneinheit

bezogen konstant verteilt ist, folgt auf elastischem Halbraum

$$w = \frac{l^3 P}{\pi D c} \int_0^\infty \frac{J_1\{\lambda c/l\} J_0\{\lambda r/l\}}{\lambda \{1 + \lambda^3\}} d\lambda, \quad q = \frac{P}{\pi l c} \int_0^\infty \frac{J_1\{\lambda c/l\} J_0\{\lambda r/l\}}{1 + \lambda^3} d\lambda$$

und nach der Annahme Winklers $w = \frac{l^3 P}{\pi D} \int_0^\infty \frac{J_1\{\lambda c/l_1\} J_0\{\lambda r/l_1\}}{1 + \lambda^4} d\lambda$.

Die Last 1 im Punkte q und ψ verursacht die Senkung

$$\frac{l^2}{2\pi D} \int_0^\infty J_0\left\{\lambda \sqrt{r^2 - 2qr \cos(\varphi - \psi) + q^2/l}\right\} \frac{d\lambda}{1 + \lambda^3}.$$

Nach dem Additionstheorem ist diese Senkung

$$\frac{l^2}{2\pi D} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos k\{\varphi - \psi\} \int_0^\infty \frac{J_k\{\lambda r/l\} J_{-k}\{\lambda q/l\}}{1 + \lambda^3} d\lambda.$$

Anm. d. Ref.: $l = \sqrt[3]{\{1 + \nu\} D/E}$, worin ν und E die Konstanten des Halbraumes sind. Die Potenzreihen der Struveschen Funktionen mit rein imaginärem Argument sind

$$iH_0\{xi\} = - \sum_{m=0}^\infty \frac{\{x/2\}^{2m+1}}{\{m + \frac{1}{2}\}!^2}, \quad H_1\{xi\} = - \sum_{m=0}^\infty \frac{\{x/2\}^{2m+2}}{\{m + \frac{1}{2}\}! \{m + \frac{3}{2}\}!}.$$

In der letzten Gleichung muß der Faktor $l^2/2\pi D$ gestrichen werden.

Konrad Ludwig (Hannover).

Mudrak, Walter: Bestimmung der Eigenschwingungszahlen von durchlaufenden Trägern und Rahmen. Z. angew. Math. Mech. 28, 258—263 (1948).

Verf. bestimmt zuerst für einen gleichförmigen Stab mit ebensolcher Belastung, dessen Enden zwar unverschieblich gelagert, aber mit den Einspannkonstanten K_1, K_2 elastisch nachgiebig befestigt sind, die Frequenzgleichung, die er in einer Netztabel auswertet; diese ist soweit entwickelt, daß sie auch die Ermittlung der 3 ersten Obertöne gestattet. Nimmt man hierzu die Bedingungen, die zwischen den Frequenzwerten benachbarter Felder und den K -Werten an den Zwischenstützen bestehen, so kann die Netztabel auch zur Bestimmung der untersten Eigenschwingungszahlen durchlaufender Träger und von Rahmentragwerken benutzt werden, wie Verf. an Zahlenbeispielen erweist. — In Gleichung (11) ist der Wurzelexponent offenbar unrichtig angegeben, außerdem fehlt dort die Erklärung der Konstanten C_i , auf die im Text (S. 262 oben) Bezug genommen ist. Statt (11) sollte es daher heißen

$$\lambda_i = \lambda_k \frac{l_i}{l_k} \sqrt[4]{\frac{q_i J_k}{q_k J_i}} = \lambda_k C_i.$$

Eine analytische Verallgemeinerung dieser Arbeit, welche auch eine elastische Verschieblichkeit der Knotenstellen mit erfaßt, war vom Ref. bereits 1945 fertig gestellt worden, mußte aber bei seiner Aussiedlung aus Prag 1946 dortselbst zurückgelassen werden; die Neuberechnung ist im Gange. Karas (Darmstadt).

Sommerfeld, Arnold: Spezielle Lösungen des Problems der elastischen Eigenschwingungen beim Quader und Würfel. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1945/46, 81—107 (1947).

Verf. berichtet über einige elementar berechenbare Fälle von elastischen Eigenschwingungen des Quaders bei kräftefreier Oberfläche. Solche Fälle bieten sich bei Quadern dar, deren Kantenlängenverhältnisse rational sind. — Bedeutet $\vec{\xi} = \xi_1, \xi_2, \xi_3$ den Vektor der elastischen Verschiebung, $\Theta = \operatorname{div} \vec{\xi}$ die Dilatation,

dann ist bei isotropem Material der Spannungstensor durch

$$\sigma_{ik} = \mu \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right) + \lambda \Theta \delta_{ik}, \quad \lambda, \mu = \text{Elastizitätsmoduln,}$$

gegeben, und das System der Differentialgleichungen der elastischen Schwingungen lautet:

$$\rho \ddot{\xi}_i = \mu \Delta \xi_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Sind l_i die Kantenlängen des dreidimensionalen Quaders $0 \leq x_i \leq l_i$, so stellt der Vektor

$$\xi_1 = A_1 \cos n\pi \frac{x_1}{a} \sin n\pi \frac{x_2}{a} e^{i\omega t}, \quad \xi_2 = -A_1 \sin n\pi \frac{x_1}{a} \cos n\pi \frac{x_2}{a} e^{i\omega t}, \quad \xi_3 = 0,$$

$$\omega = \sqrt{2} \frac{n}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad a = \frac{l_1}{\nu_1} = \frac{l_2}{\nu_2}, \quad \nu_1, \nu_2 \text{ natürliche Zahlen,}$$

elastische Eigenschwingungen der vorerwähnten Art dar. Bei diesen Eigenschwingungen verschwindet die Dilatation identisch, ebenso sämtliche Schubspannungen in den zu den Grenzebenen parallelen Ebenen. Die beiden Normalspannungen verschwinden auf den Grenzebenen, im Innern sind sie einander entgegengesetzt gleich. Als Knotenlinien ergeben sich zur x_3 -Achse parallele Geraden, deren Fußpunkte durch die beiden quadratischen Gitter

$$\begin{array}{l|l} nx_1/a = 0, 1, \dots, n_1, & nx_1/a = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n_1 - \frac{1}{2}, \\ nx_2/a = 0, 1, \dots, n_2, & nx_2/a = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n_2 - \frac{1}{2}, \end{array}$$

gegeben sind. Diese Schwingungen können als Dehnungs-Kürzungsschwingungen bezeichnet werden. — Durch Überlagerung von Schwingungen der eben beschriebenen Art ergibt sich beim Würfel der folgende Typus von Eigenschwingungen

$$\xi_1 = \cos n\pi \frac{x_1}{a} \begin{vmatrix} \sin n\pi \frac{x_2}{a} & \sin n\pi \frac{x_3}{a} \\ C_2 & C_3 \end{vmatrix} e^{i\omega t},$$

und entsprechend für ξ_2, ξ_3 durch zyklische Vertauschung der Indices. Der Eigenwert ω ist hierbei ein dreifacher. — Verf. bemerkt, daß andere elementar darstellbare kräftefreie Schwingungsformen, wie z. B. rotationsfreie Dilatationsschwingungen, nicht aufgefunden werden konnten. *Quade* (Hannover).

Sommerfeld, A.: Berichtigungen und Ergänzungen zu der Arbeit: Die freischwingende Kolbenmembran. Ann. Physik, VI s. 2, 85—86 (1948).

In Ann. Physik, V. s. 42, 389—420 (1943) wurde das Schallfeld der freischwingenden Kolbenmembran für große Wellenlängen berechnet. Die Rechnungen werden nun ergänzt, ein Fehler wird verbessert, und es werden einige Bemerkungen über die Behandlung des Problems in elliptischen Koordinaten gemacht.

J. Meixner (Aachen).

Grioli, Giuseppe: Su di una semplice formula che lega le frequenze di una piastra anulare alla pressione applicata sul bordo. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. 6, 121—134 (1947).

Verf. befaßt sich mit dem Problem der Bestimmung der Eigenfrequenzen und kritischen Drucke einer ringförmigen Platte in Anwesenheit eines radialen Druckes. Für den Fall gewisser Randbedingungen (Lagerung, Einspannung) lassen sich angenäherte Formeln erhalten, welche die Abhängigkeit der Eigenfrequenzen vom radialen Drucke und hiermit auch die kritischen Drucke geben. Das angewandte Näherungsverfahren beruht auf einer von Picone herrührenden Methode, welche es erlaubt, die linearen Probleme in Integralgleichungen umzuwandeln. Die Rechnungen sind für den Fall einer am inneren Rande eingespannten, am äußeren gelagerten und an beiden Rändern unter gleichem Drucke sich befindenden Platte durchgeführt. Für diesen Fall wird eine Tabelle und ein Diagramm für die ersten drei Eigenfrequenzen und kritischen Drucke in Abhängigkeit des Radienverhältnisses angegeben.

Wolf Gross (Rom).

Galli, A.: Durata limite di una perturbazione sincrona nelle costruzioni asismiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 4, 311—316 (1948).

Verf. sucht ein Kriterium für die kritische Zahl der aufgezogenen Schwingungen auf analytischem Wege herzuleiten, die ausgeführten Konstruktionen gefährlich werden können. Die Unsicherheit der seismischen Erfahrungen einerseits und die Kompliziertheit der Baukonstruktionen andererseits berechtigen dazu, die letzteren als einfache Vollwandstäbe aufzufassen, um so rechnerisch möglichst einfache Voraussetzungen zu schaffen. — Die Stabauslenkung bietet sich dann bei bekannter Zeitfunktion der Auflagerbewegung in Form einer linearen Integrodifferentialgleichung dar, die, im Sinne von Rayleigh, nach den Eigenfunktionen der zugeordneten Fredholm'schen homogenen Integralgleichung zweiter Art entwickelt werden, wobei die Entwicklungskoeffizienten aus den Lagrangeschen Gleichungen bestimmbare Zeitfunktionen sind. Für sie kann Verf. unter Ausnutzung der Schwarzschen Ungleichung obere Schranken angeben, die ihn dann zur Bestimmung der kritischen Schwingungszahl befähigen. — Zwei Beispiele, nämlich ein einfach gelagerter horizontaler Balken als Ersatz einer Brückenkonstruktion und ein unten eingespannter vertikaler Stab als Ersatz eines Turmes veranschaulichen das Berechnungsverfahren. *Karas (Darmstadt).*

Samarskij, A.: Über den Einfluß der Einspannung auf die Eigenfrequenzen geschlossener Volumina. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 63, 631—634 (1948) [Russisch].

Es sei T ein beliebiger n -dimensionaler, abgeschlossener Bereich mit der Oberfläche Γ . Die beliebige abgeschlossene Menge E liege im Inneren von T . Betrachtet wird die Randwertaufgabe: $\Delta v + \lambda v = 0$ in T , $v = 0$ auf Γ und $v = 0$ auf E (Einspannungsbedingung). — Definitionen: 1. Ist v Lösung, so heißt die Gesamtheit aller inneren Punkte von T mit $v = 0$ die „volle Einspannungsmenge“. 2. Ist U_E^δ bei $\delta > 0$ die δ -Umgebung von E , so heißt die Einspannung auf U_E^δ die „ δ -Einspannung längs E “. 3. Streben Eigenwerte λ_k^δ der δ -Einspannung bei $\delta \rightarrow 0$ gegen Grenzwerte $\hat{\lambda}_k$, so heißen die $\hat{\lambda}_k$ die „Eigenwerte bei einer Quasieinspannung längs E “. — 4. $c(E, \Gamma)$ ist das Wiener'sche Maß von E in bezug auf Γ [vgl. N. Wiener, J. Math. Physics, Massachusetts 3, 24—51 (1924)]. — Ergebnisse: 1. Gilt $\Delta v + \lambda v = 0$ in einer Umgebung von E des Maßes 0 und ist v beschränkt, so ist auch $\Delta v + \lambda v = 0$ auf E . Folgerung: Bei $c(E, \Gamma) = 0$ ist jede Lösung der Randwertaufgabe auch Lösung (evtl. höherer Ordnung) der Aufgabe mit $E = 0$. 2. Eine Menge des Maßes 0 ist nie die volle Einspannungsmenge. 3. Ist $c(E, \Gamma) = 0$, so bleiben die Eigenwerte auch bei einer Quasieinspannung ungeändert. 4. $c(E, \Gamma) = 0$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß der niedrigste Eigenwert bei Quasieinspannung ungeändert bleibt. 5. Für kleines $c(E, \Gamma)$ gilt für die Veränderung $\Delta \lambda$ des kleinsten Eigenwertes: $\Delta \lambda \leq 4\pi \kappa_1^2 \cdot c(E, \Gamma) +$ Glieder höherer Ordnung, wo κ_1 das Maximum der ersten Eigenfunktion auf E ist. Für den Fall der Kugel mit Einspannung längs einer Umgebung des Mittelpunktes ist die Abschätzung scharf. 6. Alle Ergebnisse gelten auch bei Ersetzung von $v = 0$ längs Γ durch die Randbedingung: $L[v] + \lambda \rho v = 0$ längs Γ mit $L[v] = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} v) - qv$, insbesondere bei $\partial v / \partial \nu + \sigma v = 0$ längs Γ . — Bezüglich der nicht mitgeteilten Beweise wird angegeben, daß sie durch Betrachtung des entsprechenden Variationsproblems $\int_T (\nabla \varphi)^2 d\tau = \text{Extrem.}$ geführt wurden, wobei $T - E$ durch eine Folge von Bereichen τ_n mit Rändern $\Gamma + \gamma_n$ und entsprechenden Randwert- und Variationsaufgaben ausgeschöpft wird. *Hans Richter (Haltingen/Baden).*

Michlin, S.-G.: Fundamental solutions of the dynamic equations of the theory of elasticity for non-homogeneous media. Priklad. Mat. Mech., Moskva, 11, 423 bis 432 u. engl. Zusammenfassg. 432 (1947) [Russisch].

Für ein inhomogenes Medium werden in Analogie zu den Volterraschen Vektoren Vektoren der elastischen Verschiebungen definiert, die auf der Oberfläche des Konoids der Longitudinal- und Transversalwellen verschwinden. Mit Hilfe einer auf inhomogene Medien verallgemeinerten Stokesschen Formel wird die Integrodifferentialgleichung für die Schwingung eines gestörten Bereiches aufgestellt.

Pretsch (Göttingen).

Pendse, C. G.: On the analysis of a small arbitrary disturbance in a homogeneous isotropic elastic solid. *Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics*, VII. s. 39, 862—867 (1948).

Gezeigt wird: Der in der Elastizitätstheorie gebräuchliche Übergang von der Gleichung

$$\varrho \frac{\partial^2 \tilde{s}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \theta + \mu \Delta \tilde{s} \quad (\theta = \operatorname{div} \tilde{s})$$

zu den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c_1^2 \Delta \theta, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} \quad (\text{Longitudinalwellen})$$

$$\text{und} \quad \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} = c_2^2 \Delta \omega_i, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\varrho}, \quad \omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \tilde{s}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{Transversalwellen})$$

ist nur der spezielle Fall eines etwas allgemeineren, der, von $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{s} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \tilde{s} - \Delta \tilde{s}$ ausgehend, nur $\operatorname{rot} \omega = 0$ bzw. $\operatorname{grad} \theta = 0$ (und nicht speziell $\omega = 0$, $\theta = 0$) verlangt. Während also z. B. \tilde{s} der longitudinalen Wellengleichung genügt, kann ω durchaus von der Form sein $\omega = (a + bt) \operatorname{grad} \psi$ (wo $\psi =$ harmonische Funktion), und umgekehrt: wenn \tilde{s} die transversale Wellengleichung erfüllt, kann $\theta = a' + b't$ sein. — „Rein longitudinale“ Wellen können mithin einen transversalen Anteil haben, „rein transversale“ einen longitudinalen, behalten aber die Geschwindigkeit von rein longitudinalen bzw. rein transversalen Wellen bei. — Verf. möchte dies mit seismologischen Tatsachen in Zusammenhang bringen: nach Katastrophenbeben bleiben im Erdkörper Brüche und Spalten zurück, ein Zeichen dafür, daß die Elastizitätsgrenze überschritten wurde. Dies wäre aber genau jener Fall, in dem die o. a. Überlegungen anzustellen wären. *Hardtwig* (München).

Koppe, H.: Über Rayleigh-Wellen an der Grenzfläche zweier Medien. *Z. angew. Math. Mech.* 28, 355—360 (1948).

Längs der Oberfläche fester Körper pflanzen sich nach Rayleigh (1887) Oberflächenwellen fort, die nur sehr wenig (exponentiell abfallend) in die Tiefe dringen (geophysikalische Anwendungen). Das isotrop vorausgesetzte Medium erfülle den Halbraum $z \geq 0$, besitze die Dichte ϱ und die elastischen Konstanten λ und μ . Aus der Bewegungsgleichung für den Deformationsvektor $u_1 = u e^{-ipz}$, etwa die Welle von der Kreisfrequenz p , folgt dann $(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} u + \varrho p^2 u = 0$, wobei als Randbedingung das Verschwinden der Spannungskomponenten $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ für $z = 0$ zu fordern ist. Aus dem Ansatz $u = w + \operatorname{grad} \varphi$; $\operatorname{div} w = 0$ folgt $\Delta \varphi + h^2 \varphi = 0$ mit $h^2 = \varrho p^2 / (\lambda + 2\mu)$ und $\Delta w + k^2 w = 0$ mit $k^2 = \varrho p^2 / \mu$. Die Lösungen sind also ebene Wellen. Speziell für $\lambda = \mu$ (Cauchy-Relation) fand Rayleigh die Geschwindigkeit der Oberflächenwellen um den Faktor 0,92 kleiner als die der transversalen Wellen. Verf. macht nun darauf aufmerksam, daß solche Wellen auch an der Grenzfläche zweier Medien existieren, dann aber nach beiden Seiten hin exponentiell abklingen. Für die Grenzfläche zweier fester Körper sind dann als Bedingungen zu fordern (Gleiten sei ausgeschlossen): 1. Gleichheit der Spannungskomponenten $\tau_{zz}^{(1)} = \tau_{zz}^{(2)}$; $\tau_{zx}^{(1)} = \tau_{zx}^{(2)}$ und 2. Stetigkeit der Verschiebungskomponenten $u_x^{(1)} = u_x^{(2)}$; $u_z^{(1)} = u_z^{(2)}$. Die Berechnung der Grenzflächengeschwindigkeit wird komplizierter, bietet aber keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Die numerische Auswertung ergibt, daß die Geschwindigkeit der Grenzflächenwellen, sofern solche überhaupt möglich sind, immer zwischen der der Rayleigh-Wellen und der Transversalwellen im akustisch dichteren Medium liegt. Die genauere Abhängigkeit der Grenzflächengeschwindigkeit vom Verhältnis der Transversalwellengeschwindigkeiten v_{T_1}/v_{T_2} und von μ_1/μ_2 ist in einem Diagramm dargestellt, wobei ein größeres Gebiet auftritt, in welchem keine Grenzflächenwellen möglich sind. — Für die Untersuchung von Grenzflächenwellen an der Grenze zwischen einem festen Körper und einer Flüssigkeit wird 1. die Flüssigkeit als reibungslos angesehen, 2. eine Beschränkung auf kleine Schwingungen vor-

genommen, um die nichtlinearen Trägheitsglieder in der Bewegungsgleichung der Flüssigkeit weglassen zu können. Die Diskussion der Lösung ergibt in diesem Falle, daß an der Grenzfläche fest-flüssig immer Grenzflächenwellen auftreten, daß diese aber immer langsamer laufen als die Rayleighwellen. *Riegels* (Göttingen).

Galin, L. A.: Analogie für das ebene elasto-plastische Problem. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 757—768 (1948) [Russisch].

Eine unendlich ausgedehnte, dünne, ebene Platte mit einem Loch des Randes L werde beansprucht durch im Unendlichen angreifende Spannungen $\sigma_{x\infty}$ und $\sigma_{y\infty}$. Um das Loch bilde sich ein plastischer Bereich aus, in welchem die Spannungsfunktion der Differentialgleichung (1): $(\varphi_{xx} - \varphi_{yy})^2 + 4\varphi_{xy}^2 = 4k^2$ genügt, mit den Randbedingungen $\varphi = \varphi_n = 0$ längs L . Im elastischen Bereich dagegen genügt φ der biharmonischen Differentialgleichung (2): $\Delta\Delta\varphi = 0$, die gleichzeitig die Differentialgleichung für die Biegung einer dünnen Platte unter dem Einfluß von Momenten ist, die im Unendlichen angreifen. Sei φ_1 die Lösung von (1), dann konstruiere man 2 Körper mit den Oberflächen $z = \pm \varphi_1(x, y)$. Zwischen diese Körper bringe man eine dünne elastische Platte, die im Unendlichen durch Momente beansprucht wird. Die Platte legt sich dann teilweise an die Körper an, so daß dort die Durchbiegung $w(x, y) = \pm \varphi_1(x, y)$ wird, während in den übrigen Bereichen $\Delta\Delta w = 0$ gilt. $w(x, y)$ ist somit die Spannungsfunktion für eine ebene Platte unter dem Einfluß von Spannungen im Unendlichen bei Ausbildung von plastischen Bereichen. Auf diese Weise kann die Spannungsfunktion in den Fällen experimentell ermittelt werden, bei denen im Gegensatz zum Falle des kreisförmigen Randes die rein mathematische Behandlung zu schwierig ist. *Hans Richter* (Haltingen).

Bachšijan, F. A.: Drehung eines starren Zylinders in einem zähplastischen Mittel. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 749—756 (1948) [Russisch].

Ein in sich starrer Kreiszyylinder dreht sich in einem zäh-plastischen Medium mit der Oberflächengeschwindigkeit $\psi_1(t)$, $t \geq 0$. Das Medium genüge der Theorie von Iljušin [vgl. das Referat über frühere Arbeit des Verf., dies. Zbl. 29, 281]. Die Tangentialgeschwindigkeit $v(r, t)$ gehorcht dann bei Einführung geeigneter dimensionsloser Variabler (wobei Zylinderradius = 1 und Außenradius des Mediums = $\lambda > 1$ werden) der Differentialgleichung (1): $\dot{v} = v'' + v'/r - v/r^2 - k/r$ mit Anfangs- und Randbedingungen: $v(1, t) = \psi(t)$, $v(r, 0) = f(r)$, $v(\lambda, t) = 0$. — Im Falle $f(r) = 0$, $\psi(t) = 1$ (plötzlich einsetzende gleichförmige Drehung des Zylinders in einem vorher ruhenden Medium wird:

$$v = v_1(x) - \sum_{\alpha} A(\alpha) \cdot [J_1(\alpha x) + q(\alpha) \cdot N_1(\alpha x)] \cdot \exp(-\alpha^2 t),$$

wo $v_1(x)$ die leicht angebbare stationäre Lösung von (1) mit der Bessel-Entwicklung in $1 < x \leq \lambda$: $v_1(x) = \sum_{\alpha} A(\alpha) \cdot [J_1(\alpha x) + q(\alpha) N_1(\alpha x)]$ ist, die α der Bedingung

$J_1(\alpha) N_1(\lambda \alpha) = J_1(\lambda \alpha) N_1(\alpha)$ genügen und $q(\alpha) = -J_1(\alpha) N_1(\alpha)$ wird. Die $A(\alpha)$ lassen sich dann explizit durch Besselfunktionen mit den Argumenten α und $\lambda \alpha$ ausdrücken. Für $t = 0$ ist die Spannung bei $x = 1$ unendlich, dagegen bei $x > 1$ gleich 0. — Bei beliebigem $\psi(t)$ wird (1) mit Hilfe der Laplace-Transformation nach der Zeit gelöst. Die Rücktransformation liefert v in folgender Gestalt (die entsprechende Formel ist leider durch Druckfehler sehr entstellt) unter Verwendung obiger α : $v = \sum_{\alpha} H(\alpha) \exp(-\alpha^2 t)$, wo die $H(\alpha)$ außer Integralen über $\psi(t)$ noch Besselfunktionen

$D(\alpha, x, \lambda) = J_1(\alpha x) N_1(\alpha \lambda) - J_1(\alpha \lambda) N_1(\alpha x)$ und Koeffizienten $\partial D(\alpha, 1, \lambda) / \partial \alpha$ enthalten. — Im Falle $\lambda = \infty$ wird (1) gelöst durch den Ansatz:

$$v(r, t) = -\frac{kt}{r} + \frac{1}{r} \int_0^t g(y) \exp(-r^2/4(t-y)) dy + 2\psi(0) \cdot \int_0^{\infty} J_2(\xi) J_1(\xi x) \exp(-\xi^2 t) d\xi,$$

der $v(r, 0) = 0$ für $x > 1$ und $v(1, 0) = \psi(0)$ befriedigt. Die Randbedingung $v(1, t) = \psi(t)$ liefert dann zur Bestimmung von $g(y)$ eine Volterrasche Integralgleichung.

Hans Richter (Haltingen/Baden).

Hydrodynamik:

Kaufmann, Walter: Über die Aufwicklung einer instabilen Wirbelschicht von endlicher Breite. S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1945/46, 109—130 (1947).

Bewegt man eine materielle Fläche endlicher Breite mit kleinem Anstellwinkel durch eine unendlich ausgedehnte, ideale Flüssigkeit, so bildet sich von der Hinterkante ausgehend, eine instabile Wirbelschicht aus, die sich von den seitlichen Enden der Fläche nach der Mitte zu allmählich aufwickelt und schließlich in zwei isolierte Einzelwirbel übergeht. Nach ihrem Verhalten sind hierbei zwei Bereiche zu unterscheiden: 1. die Wirbelkerne (von endlichem Querschnitt), die von der spiralig aufgewickelten Wirbelschicht gebildet werden, und 2. der außerhalb der Kerne gelegene Bereich, in dem Potentialströmung herrscht. Da für eine Reihe von hydrodynamischen Problemen die Kenntnis der Größe dieser Wirbelkerne sowie die Zirkulationsverteilung in ihnen eine Rolle spielt, werden vom Verf. die bisherigen Untersuchungen von Kaden und Betz einer kritischen Würdigung unterzogen und fortgesetzt. Verf. bemerkt, daß die Stromlinien derjenigen Potentialströmung, die von einem Wirbelpaar erzeugt wird, Apolloniussche Kreise sind, deren Mittelpunkte nicht mit den Wirbelachsen zusammenfallen. Die Kernränder sind nun solche Randstromlinien. Daher sind die Wirbelkerne exzentrisch zu den Wirbelachsen gelegen, und zwar rücken ihre Mittelpunkte von den Wirbelachsen weg nach den Seitenrändern der Fläche zu. Diese Bemerkung führt zu einer Erweiterung der Theorie von Betz. Für die beiden Fälle der elliptischen und nichtelliptischen Zirkulationsverteilung wird der Mechanismus der Wirbelkerne studiert und durch geeigneten Näherungsansatz berechnet. Zur Prüfung der Theorie berechnet Verf. die Druckverteilung in einem zu den Wirbelachsen lotrechten Schnitt in großer Entfernung hinter der bewegten Fläche und vergleicht sie mit Messungen von H. Muttray an einer rechteckigen Tragfläche. Der Vergleich führt zu einer fast vollständigen Übereinstimmung der gemessenen und berechneten Werte.

V. Garten (Tübingen).

Ėterman, I. I.: Bestimmung der Oberfläche eines Rotationskörpers mit vorgegebener Druckverteilung. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 56, 351—353 (1947) [Russisch].

Soit un solide A , de révolution autour de Ox , dont la méridienne C puisse être définie par une équation de la forme: $y = f(x)$, $-L \leq x \leq L$; $f(-L) = f(L) = 0$, $f(x)$ étant assez régulière. Un fluide parfait, emplissant l'espace extérieur à A , s'écoule autour de A ; soit φ son potentiel des vitesses de révolution autour de Ox . $(\partial\varphi/\partial x)_{x=\infty}$ est donné. On suppose connue la repartition $V_\sigma(x)$ des vitesses le long de C . L'A. se propose de déterminer $f(x)$ connaissant $V_\sigma(x)$; ce problème est résolu en première approximation — lorsque A diffère peu d'un ellipsoïde — au moyen de développements en série de fonctions spéciales.

J. Kravtchenko.

Birkhoff, Garret: Remarks on streamlines of discontinuity. Rev. Ci., Lima 50, 105—130 (1948).

Es handelt sich um den Widerstand, den in einer strömenden Flüssigkeit ein Körper findet, wenn sich hinter ihm Hohlräume ausbilden, zwischen denen ein Strahl rückströmt (cavity motion with reentrant jets). Aus der Impulsgleichung, angewendet auf den Raum zwischen dem Körper und einer großen Kugel, wird eine Beziehung zwischen dem Widerstandskoeffizienten, den Querschnitten von Körper und Strahl und dem Parameter K der Kavitation abgeleitet, wobei K dem Druckunterschied zwischen freiem Strahl und Hohlraum proportional ist. Ausdehnung auf den Fall kompressibler Medien.

Hamel (Landshut/Bayern).

Beach, James W.: Flow of viscous fluid between slowly rotating eccentric cylinders. Abstract of a Thesis. Iowa College, J. Sci. 23, 7—10 (1949).

Die zähe Strömung zwischen langsam rotierenden exzentrischen Zylindern ist durch Lösung der Differentialgleichung $\Delta\Delta\varphi = 0$ bereits 1904 von A. Sommerfeld für die Theorie des geschmierten Zapfens berechnet worden. Wie sich die Dissertation des Verf. von der Sommerfeldschen Untersuchung, die ihm unbekannt gewesen zu sein scheint, unterscheidet, ist aus dem kurzen Auszug nicht ersichtlich.

Pretsch (Göttingen).

Alden, Henry Leonhard: Second approximation to the laminar boundary layer flow over a flat plate. J. Math. Physics, Massachusetts 27, 91—104 (1948).

Für die Prandtl'sche Grenzschichttheorie, welche die erste Näherung für die asymptotische Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen darstellt, wird die lang erwartete zweite Näherung am Beispiel der Strömung längs einer ebenen Platte berechnet. Nach Transformation der hydrodynamischen Grundgleichungen auf Parabelkoordinaten wird die Stromfunktion nach Potenzen der kinematischen Zähigkeit entwickelt. Durch Koeffizientenvergleich erhält man Gleichungen für die Stromfunktionen verschiedener Näherungsordnung. Die erste Näherung liefert die bekannte Blasius-Lösung. Die zweite Näherung wird ebenfalls durch numerische Integration einer nichtlinearen Differentialgleichung dritter Ordnung gewonnen. Schaubilder zeigen den Einfluß der zweiten Näherung auf die Geschwindigkeitsprofile nahe der Platten Vorderkante.

Pretsch (Göttingen).

Görtler, H.: Grenzschichtentstehung an Zylindern bei Anfahrt aus der Ruhe. Arch. Math., Oberwolfach 1, 138—147 (1948).

Verf. benutzt eine allgemeine, von ihm entwickelte Theorie [Ingenieur-Arch. 14, 286—305 (1944)], um Ort und Zeitpunkt der Grenzschichtablösung für den Fall zu bestimmen, daß die Geschwindigkeit der regulären Potentialströmung längs der Zylinderkontur die Gestalt

$$U_0(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ q(x) t^n & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

(t = Zeit, x = Wandbogenlänge, gemessen vom vorderen Staupunkt aus) hat. Die Stromfunktion der Grenzschichtströmung läßt sich als Potenzreihe in t schreiben. In erster Näherung (d. h. bei Vernachlässigung höherer Potenzen von t) erfolgt für jedes n der Ablösungsbeginn dort, wo $-q'(x)$ einen positiven maximalen Wert annimmt, und zwischen Ort und Zeit der Ablösung besteht die Beziehung

$t [-q'(x)]^{1/(1+n)} = 0,70$	1,53	1,58	1,55	1,50
für $n = 0$	1	2	3	4

Insbesondere ergibt sich (auch in zweiter und dritter Näherung) für symmetrisch umströmte elliptische Zylinder vom Achsenverhältnis $m = b/a$ (a = Länge der in Anströmrichtung liegenden Halbachse), daß für $m \leq 2/\sqrt{3}$ die Ablösung im hinteren Staupunkt, für $m > 2/\sqrt{3}$ in zwei dazu symmetrisch gelegenen Stellen einsetzt. In den vor allem interessierenden Fällen $n = 0$ und $n = 1$ beginnt die Ablösung unter allen Ellipsen mit gleichem a am spätesten bei der Ellipse mit $m = 1,28$. Eine experimentelle Nachprüfung ergab gute Übereinstimmung mit der Theorie, zum Teil noch weit über den Zeitpunkt des Ablösungsbeginns hinaus.

Weissingner (Hamburg).

Görtler, H.: Zur Approximation stationärer laminarer Grenzschichtströmungen mit Hilfe der abgebrochenen Blasius'schen Reihe. Arch. Math., Oberwolfach 1, 235—240 (1949).

Die Stromfunktion ψ einer laminaren Grenzschichtströmung in der x, y -Ebene genügt der Differentialgleichung $\psi_{xx}\psi_{xy} - \psi_x\psi_{yy} = U U' + \nu \psi_{yyy}$ mit den Randbedingungen $\psi_x = \psi_y = 0$ für $y = 0$; $\psi_x \rightarrow U(x)$ für $y \rightarrow \infty$. $U = U(x)$ bezeichnet dabei die Geschwindigkeitsverteilung der äußeren Potentialströmung. U' deren Ableitung nach x und ν die kinematische Zähigkeit. Seit Blasius (1908)

wird diese Differentialgleichung durch den Potenzreihenansatz $\psi(x, y) = \sum_{n=1}^m F_n(y) x^n$, $m \rightarrow \infty$, integriert, wobei sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Koeffizientenfunktionen $F_n(y)$ ergibt. In diese $F_n(y)$ gehen die Koeffizienten u_λ einer Potenzreihenentwicklung der gegebenen Funktion $U(x) = \sum_{\lambda=1}^k u_\lambda x^\lambda$, $k \rightarrow \infty$, als Daten des jeweiligen Problems ein, und zwar ergeben sich die F_n als Linearkombinationen gewisser Grundfunktionen mit von u_λ abhängigen Koeffizienten. Solche Grundfunktionen wurden von Blasius, Howarth (1935), Frössling (1940) und neuerdings von A. Ulrich (1944, erscheint demnächst in Arch. Math., Oberwolfach) vertafelt. Dabei ist man trotz großen numerischen Aufwandes bisher erst bis zur Ordnung $m = 9$ gekommen. Der Verf. stellt nun die Frage nach der Güte des Blasius'schen Approximation (m endlich) und gibt ein Kriterium dafür, wann spätestens diese Approximation mit Sicherheit unbrauchbar wird. Er folgert dazu aus der „ersten Grenzschichtbindung“: Wird die Blasius'sche Reihe nach dem Gliede m -ten Grades in x abgebrochen und bezeichnet k den Grad des U -Polynoms, so gilt: 1. $(\partial^2 u / \partial y^2)_{y=0}$ berechnet sich aus einer Blasius-Approximation exakt für alle x des Gültigkeitsbereiches des U -Polynoms, wenn $m \geq 2k - 1$; 2. ist dagegen $m < 2k - 1$, wird also eine geringere Ordnung der Blasius-Approximation gewählt, so läßt sich der resultierende Fehler in der Berechnung dieser zweiten Ableitung schon vor der eigentlichen Grenzschichtberechnung angeben. — Am Beispiel der Hiemenz'schen Strömung um den Kreiszylinder wird dieses Kriterium vorgeführt. *Riegels.*

Hopf, Eberhard: A mathematical example displaying features of turbulence. Commun. appl. Math., New York **1**, 303—322 (1948).

Das von Burgers vorgeschlagene Turbulenzmodell gestattet nicht, das asymptotische Verhalten der Geschwindigkeiten in der Zukunft ($t \rightarrow \infty$) und bei kleiner Zähigkeit der Flüssigkeit ($\mu \rightarrow 0$) vorauszusagen. Diesem Mangel soll durch ein anderes einfaches, nichtlineares Modell abgeholfen werden, dessen Definitionsbereich eine Kreislinie ist. Statt der Produkte von Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsgradient in den Navier-Stokesschen Gleichungen werden Faltungsprodukte der Geschwindigkeiten in den Ersatzgleichungen eingeführt, so daß die Lösungen durch räumliche Fourieranalyse berechnet werden können. Neben dem asymptotischen Verhalten für $t \rightarrow \infty$ und $\mu \rightarrow 0$ wird auch der Korrelationsfaktor für $\mu \rightarrow 0$ abgeleitet. Er ergibt sich proportional zum Abstand $x' - x$, während er nach neueren Untersuchungen von Kolmogoroff, v. Weizsäcker und Heisenberg die Form $1 - \text{const. } |x' - x|^{\frac{2}{3}}$ hat. Der Unterschied rührt daher, daß in dem vereinfachten Modell eine Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Frequenzen des räumlichen Fourier-Bildes nicht besteht. Verf. kündigt das Studium einfacher Turbulenzmodelle mit loser Kopplung für eine spätere Arbeit über die Grundlagen der statistischen Hydrodynamik an. *Pretsch* (Göttingen).

Wieghardt, K.: Über Ausbreitungsvorgänge in turbulenten Reibungsschichten. Z. angew. Math. Mech. **28**, 346—355 (1948).

Verf. hat das Temperaturfeld hinter einer schwachen punkt- bzw. linienförmigen Wärmequelle am Boden einer Reibungsschicht ausgemessen und die Ergebnisse mit Benutzung theoretischer Überlegungen in einem Formelsystem zusammengefaßt. Achtet man darauf, daß der Unterschied im spez. Gewicht der erwärmten Luft gegenüber der kalten Luft der Hauptströmung so gering ist, daß die Eigengeschwindigkeit der warmen Luftteilchen durch den Auftrieb nach oben gegen die horizontale Windgeschwindigkeit U vernachlässigt werden kann, so lassen sich die Ergebnisse ebenso auf die turbulente Diffusion chemischer oder mechanischer Beimengungen anwenden, wenn man die Austauschgrößen für den Massenstrom (ϵ_M) und für den Wärme-

strom (ε_θ) gleich setzt. Der Impulsaustausch (ε_τ) ist dagegen immer kleiner, und zwar abhängig von den kinematischen Strömungsverhältnissen, bei Wandturbulenz z. B. $\varepsilon_\theta/\varepsilon_\tau = 1,4$. Das Versuchsmaterial wurde ausgewertet auf Grund des Ansatzes

$$\vartheta = \vartheta_0(x) \exp \left\{ - \left(\frac{y}{f_1(x)} \right)^\alpha - \left(\frac{|z|}{f_2(x)} \right)^\beta \right\}.$$

Für $Ux/\nu > 5 \cdot 10^4$ ergab sich für die Punktquelle $f_1 = 2,90x (Ux/\nu)^{-\frac{1}{2}}$; $f_2 = 1,64 f_1$, für die Linienquelle $f_1 = 0,55x (Ux/\nu)^{-\frac{1}{2}}$, $f_2 = \infty$. Die letztere Formel zeigt, daß die Dicke der Ausbreitzungszone bei ebener Grundströmung (bis auf den Zahlenfaktor) nach demselben Gesetz anwächst wie die Geschwindigkeitsverteilung einer turbulenten Reibungsschicht an einer ebenen Platte. Aus der Wärmeerhaltungsgleichung ergibt sich für die maximale Temperaturdifferenz $\vartheta_0(x)$ in Abhängigkeit von der Entfernung x hinter der Wärmequelle bei der Punktquelle (W = Quellergiebigkeit in cal/sec):

$$\varrho g c_p \vartheta_0(x) = 0,0446 \left(\frac{U\delta}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Ux}{\nu} \right)^{-1,43} \frac{UW}{\nu^2},$$

bei der Linienquelle (W/B = Quellergiebigkeit in cal/sec längs der Breite B):

$$\varrho g c_p \vartheta_0(x) = 2,52 \left(\frac{U\delta}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{Ux}{\nu} \right)^{-0,91} \frac{W}{B\nu}.$$

Die erhaltenen, seit 1944 vorliegenden Ergebnisse zeigen im Prinzip einen ähnlichen Aufbau wie eine theoretische Näherungslösung von B. Frost [Proc. R. Soc. London, A 186, 20 (1946)], die zum Schluß noch eingehend diskutiert wird. Riegels.

Reutter, F.: Eine ebene Potentialströmung in der Umgebung der Schallgeschwindigkeit. *Ingenieur-Arch.* 16, 299—306 (1948).

Verf. betrachtet adiabatische, reibungs- und wirbelfreie, stationäre, ebene Gasströmungen in der Umgebung der kritischen Schallgeschwindigkeit. Von der Strömung wird vorausgesetzt $|v/u| \ll 1$ (u, v Geschwindigkeitskomponenten parallel zur x - bzw. y -Achse). Weiter wird die Stromdichte durch einen auf Kl. Oswatitsch zurückgehenden Ansatz $a - b \cdot (c^* - u)^2$ (a, b gewisse Konstanten, c^* kritische Schallgeschwindigkeit) angenähert, der im Bereiche $0,5 \leq u/c^* \leq 1,5$ eine recht gute Approximation darstellen soll. Man kommt damit für das Potential $\Phi(x, y)$ auf die Differentialgleichung $-\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$, die durch Anwendung der Legendre-Transformation linearisiert wird. Für die linearisierte Gleichung lassen sich dann unter Benutzung des Produktansatzes partikuläre Integrale angeben, so daß endlichen Punkten der Legendre-Ebene endliche Punkte der Strömungsebene zugeordnet sind. Verf. geht nun zunächst auf Strömungen um Profile mit nicht-horizontaler Tangente ein. Um solche Strömungen zu konstruieren, wird das Potential in der Legendre-Ebene aus einer Summe von Partikulär-Integralen und einem durch eine Doppelreihe gegebenen Zusatzpotential aufgebaut, das in dem der Anströmgeschwindigkeit entsprechenden Punkte eine Singularität aufweist. Verf. sagt ausdrücklich, daß für die so eingeführte Singularität der gewünschte Dipolcharakter nicht nachgewiesen ist. Für ein vorgegebenes Profil in der Strömungsebene läßt sich dann die Potentialfunktion und die Geschwindigkeitsverteilung theoretisch ermitteln. Praktisch dürften die durchzuführenden Rechnungen äußerst mühsam sein. Im Schlußteil der Arbeit werden zwei Wege angedeutet, wie man sich von der Beschränkung auf Profile mit nichthorizontaler Tangente freimachen kann. Wegen der numerischen Behandlung von Beispielen wird auf eine spätere Veröffentlichung verwiesen. Wendt (Bonn).

Krasil'shikova, E. A.: Einfluß der Wirbel bei Bewegung eines Flügels mit Überschallgeschwindigkeit. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, II. s. 58, 989—991 (1947) [Russisch].

Soit une aile d'avion L , d'envergure finie, animée, en régime supersonique, d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. Le potentiel des vitesses φ du

problème d'écoulement linéarisé se détermine à partir de $\partial\varphi/\partial z$ (z étant la cote de la section normale de L), supposé donné le long du contour de L . Dans un travail antérieur [cf. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s., 58, 761—762 (1947)], l'A. avait donné l'expression de $\Theta = \partial\varphi/\partial z$ dans la région du plan des x, y non influencée par la couche tourbillonnaire à l'arrière de L ; la présente note complète le résultat précédent en explicitant $\partial\varphi/\partial z$ dans la partie restante du cône de Mach.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Meksyn, D.: Integration of the boundary-layer equations for a plane in a compressible fluid. Proc. R. Soc. London A 195, 180—188 (1948).

Das Problem der laminaren Grenzschicht um die ebene Platte wurde zuerst von A. Busemann [Z. angew. Math. Mech. 15, 23—25 (1935)] in Angriff genommen. Er behandelte das Thermometerproblem für die Prandtl'sche Zahl 1. Den Fall konstanter Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit, aber von 1 verschiedener Prandtl'scher Zahl untersuchte Frankl im Jahre 1934 (Central Aero-Hydrodyn. Inst. Moskau 1934, ZAHl-Bericht 176, russisch). Im Anschluß an Busemann haben 1938 v. Kármán und Tsien die Abhängigkeit des Reibungswiderstandes von der Mach'schen Zahl der Anströmung genauer angegeben [J. aero-aut. Sci., New York 5, 227]. Die allgemeine Integration der Differentialgleichungen der kompressiblen Grenzschichtströmung um die ebene Platte bei beliebiger, aber fester Prandtl'scher Zahl und veränderlicher Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit wurde 1940 und 1942 in Deutschland geleistet [W. Hantzsche und H. Wendt, Jb. Deutsch. Luftfahrtforschung 1940, 517; 1942, 40; dort auch zahlreiches numerisches Material]. Das gleiche Problem wurde 1941 in Italien von Crocco gelöst [Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. 2, 138—152 (1941); dies. Zbl. 25, 407]. In England haben 1941 Brainerd und Emmons [J. appl. Mech., New York 9, A 1] die partiellen Differentialgleichungen der Grenzschicht um die ebene Platte auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt und numerische Ergebnisse veröffentlicht. Im Anschluß an diese und eine eigene frühere Arbeit [Proc. R. Soc. London A 192, 545—567 (1948)] gibt der Verf. eine Näherungsmethode zur numerischen Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen von Brainerd und Emmons an. *Wendt* (Bonn).

Novikov, I. I.: Über die Existenz von Stoßwellen der Verdünnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 59, 1545—1546 (1948) [Russisch].

Verf. zeigt, daß in einer Wasserdampfströmung bei den dem kritischen Druck nahen Drücken die Bildung von Stoßwellen der Verdünnung thermodynamisch möglich sein müßte. *Wendt* (Bonn).

Keller, Joseph B.: The solitary wave and periodic waves in shallow water. Commun. appl. Math., New York 1, 323—339 (1948).

Es wird eine Theorie der stationären, zweidimensionalen Wellen in seichtem Wasser abgeleitet, indem die Eulerschen Gleichungen nach Potenzen von $\sigma = (\omega h)^2$ entwickelt werden, wo h die Tiefe der ungestörten Flüssigkeit und ω^{-1} eine charakteristische Länge in horizontaler Richtung bezeichnet. Die Rechnung wird bis zur zweiten Näherung explizit durchgeführt und liefert neben Druck, Wellenlänge und Horizontalgeschwindigkeit die Oberflächenprofile für die periodischen Wellen und für die „Einzelwelle“ (Wellenlänge ∞), die aus nur einer Auslenkung besteht, die sich ohne Formänderung fortpflanzt. Die älteren Ansätze von Korteweg und de Vries einerseits und von Rayleigh und Boussinesq andererseits werden damit durch eine geschlossene und gesicherte Darstellung abgelöst. *Pretsch*.

Burgers, J. M.: Note on the damping of the rotational oscillation of a spherical mass of an elastic fluid in consequence of slipping along the boundary. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 52, 113—119 (1949).

Im Anschluß an eine frühere Mitteilung [Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 1211 bis 1221 (1948)] wird unter der Annahme, daß die Dämpfung der Schwingungen einer elastischen Flüssigkeitskugel durch Gleiten an der Wand hervorgerufen wird, die Periode und das logarithmische Dekrement der ersten Rotationsschwingung genauer bestimmt, womit jedoch die Messungen von Bungenberg de Jong noch nicht völlig befriedigend erklärt werden. *Pretsch* (Göttingen).

Florin, V. A.: Das Problem der Konsolidierung eines erdigen Mittels. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 59, 219—222 (1948) [Russisch].

L'A. avait établi [cf. ce Zbl. 31, 91] l'équation fondamentale (E) qui régit

le phénomène de la consolidation d'un massif de terre où coexistent les phases liquide et gazeuse. L'équation (*E*) fait intervenir divers coefficients d'une définition délicate que l'A. relie, au moyen d'hypothèses simplificatrices, à des caractéristiques expérimentales, résultant d'un essai sur modèle réduit — dont il discute l'emploi. Enfin de nouvelles hypothèses concernant les inconnues et les conditions aux limites permettent de réduire (*E*) à une forme résoluble numériquement par la méthode des différences finies; l'A. donne à la fin quelques graphiques interprétant ses calculs.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Optik:

● **Johnson, B. K.:** *Optical design and lens computation*. London: Hatton Press, Ltd. 1948. VIII, 175 p. 36 s.

Wagner, Helmut: *Anwendung moderner mathematischer Methoden auf Probleme des optischen Rechnens*. Arch. Math., Oberwolfach 1, 303—311 (1949).

Verf. geht zunächst kurz ein auf die bekannten Schwierigkeiten der Berechnung optischer Systeme. Wegen der großen Zahl der unabhängigen Veränderlichen und der verhältnismäßig großen Zahl von zu erfüllenden Bedingungen ist es bekanntlich nicht möglich, die den Bedingungen entsprechenden Gleichungen in mathematisch einwandfreier Form zu lösen. Man ist vielmehr gezwungen, ausgehend von zunächst einmal angenommenen Radien, Mittendicken und Glasmaterialien, den Korrektionszustand des so festgelegten Systems im Hinblick auf die verschiedenen möglichen Abbildungsfehler trigonometrisch durchzurechnen, um auf Grund der erhaltenen „Fehler“ des Systems gewisse Änderungen vorzunehmen und das System erneut trigonometrisch durchzurechnen. Dieses Verfahren muß so lange wiederholt werden („trigonometrisches Tatonnement“), bis die verbleibenden Restfehler genügend klein sind. Auch die Benutzung kleiner Änderungen der Ausgangsdaten des Systems und die Bestimmung der durch diese Änderungen bedingten Änderungen der resultierenden Fehlergrößen, die sich ja unter Benutzung von Methoden der Differentialrechnung durchführen läßt, vermindert die erforderliche Rechenarbeit zur Bestimmung eines praktisch einwandfreien optischen Systems kaum nennenswert. Verf. gibt dann an, daß sich die ganze Durchrechnung durch Anwendung neuer Gedanken in eine übersichtliche und erheblich einfachere Form bringen läßt. Er führt zu diesem Zweck verschiedene neue Begriffe ein, indem er die partiellen Ableitungen z. B. der resultierenden Schnittweite und der Zwischenschnittweiten nach Parametern der einzelnen Flächen bildet oder diese in Matrix-Form schreibt und aus ihnen gewisse neue Matrizen bildet. Ein vom Verf. angegebenes verhältnismäßig allgemeines Schema der Matrizen soll die neue Methode anschaulicher machen. Ref. vermißt ein tatsächlich nach dieser Methode durchgeführtes Zahlenbeispiel.

Picht (Potsdam-Babelsberg).

Seth, J. B.: *The geometry of extraordinary refraction*. Indian J. Physics 22, 379—390 (1948).

Verf. bestimmt in der vorliegenden Arbeit die mathematische Beziehung, die zwischen dem Brechungswinkel des außerordentlichen Strahls (bzw. der außerordentlichen Wellennormale) in einem einachsigen Kristall mit dem Einfallswinkel und der Neigung der optischen Achse zur brechenden Fläche besteht. Dabei setzt er voraus, daß die optische Achse des Kristalls in der Einfallsebene liegt, hier aber beliebige Richtung haben kann. Er gibt an, daß bisher für die Brechung des außerordentlichen Strahls und der außerordentlichen Wellennormale nur einige Spezialfälle theoretisch behandelt seien, die er durch entsprechende Spezialisierung aus seiner allgemein gehaltenen Untersuchung wieder gewinnt. (Dem Ref. ist indessen aufgefallen, daß es auf S. 382 unten für die dort eingeführten Koordinaten x und z statt $x = \cos \alpha / \sin i$ und $z = \sin \alpha / \sin i$ heißen muß: $x = \cos \alpha / \cos i$ und $z = \sin \alpha / \cos i$. Dieser Fehler zieht sich durch die ganze Arbeit hin, so daß $\sin i$ an allen Stellen

durch $\cos i$ ersetzt werden muß. In Gleichung 6 muß es im Nenner $\sin 2\alpha$ statt $\sin^2 \alpha$ heißen.

Picht (Potsdam-Babelsberg).

Coxeter, H. S. M.: The product of three reflections. *Quart. appl. Math.* 5, 217—222 (1947).

Es wird die Geometrie des Strahlenganges bei mehrfacher — insbesondere dreifacher — Reflexion an ebenen Spiegeln untersucht. Mathematisch beruht die Arbeit im wesentlichen auf einem Satz von Schwarz, nach dem unter allen einem spitzwinkligen Dreieck einbeschriebenen Dreiecken das Dreieck der Höhenfußpunkte den kleinsten Umfang hat; sie schließt sich an Untersuchungen von Synge und Tuckerman an, die sich auf den gleichen Gegenstand beziehen. *H. Müller* (Mainz).

Maréchal, André: Propriétés générales des faibles aberrations. *Rev. Optique théor. instrum.*, Paris 27, 649—656 (1948).

Die Aberrationen optischer Systeme lassen sich bekanntlich auch durch Größen ausdrücken, die die Abweichung der (bildseitigen) deformierten Wellenfläche von einer geeigneten Kugelfläche, deren Mittelpunkt mit dem zugehörigen Bildpunkt zusammenfällt, angeben. Dies wird vom Verf. der vorliegenden Arbeit gleichfalls durchgeführt, wobei er sich von vornherein auf schwache Aberrationen beschränkt, so daß die „Wellenflächen-Aberrationen“, wie man ja die erwähnten Abweichungen der Wellenflächen nennt, in Taylorsche Reihen entwickelt werden können, wobei überdies mit dem ersten Glied der Entwicklung abgebrochen werden kann. Verf. führt dies näher aus und wendet die Ergebnisse — die übrigens dem Ref. nicht neu sind — speziell auf die Untersuchung des Komafehlers an, wobei er u. a. zu einem Ausdruck geführt wird, der eng mit der Abbeschen Sinusbedingung bzw. der Isoplanasie-Bedingung zusammenhängt. Bezüglich der Koma ergeben sich außerdem einige weitere interessante Folgerungen.

Picht (Potsdam-Babelsberg).

Vouk, V.: Projected area of convex bodies. *Nature*, London 162, 330—331 (1948).

Bei der photometrischen Bestimmung der spezifischen Oberflächen fein verteilter Stoffe ist es wichtig, die Beziehung zwischen der projizierten Fläche der Teilchen, die tatsächlich gemessen wird, und der entsprechenden Teilchenoberfläche zu kennen. Die Lösung dieser Frage wurde 1832 von A. Cauchy angegeben, und zwar besteht die Beziehung: $S = 4 \cdot \bar{A}$, wo S die tatsächliche Oberfläche und \bar{A} der Mittelwert der projizierten Fläche eines konvexen Körpers bedeutet, wobei die Mittelung über alle möglichen räumlichen Orientierungen der Teilchen zur Projektionsrichtung zu nehmen ist. — Verf. leitet in vorliegender Arbeit dieses Resultat auf einem etwas anderen Wege mittels vektorieller Beziehungen noch einmal ab und verweist darauf, daß das Ergebnis nur richtig ist, wenn der betrachtete Körper, also entsprechend die einzelnen zu untersuchenden Teilchen keine „Einbeulungen“ besitzen, die bei gewissen Orientierungen bei der Projektion durch andere Flächenelemente abgeschattet werden.

Picht (Potsdam-Babelsberg).

Franz, Walter: Zur Theorie der Beugung. *Z. Physik* 125, 563—596 (1949).

Für die Behandlung von akustischen und elektromagnetischen Beugungsproblemen wird ein Näherungsverfahren angegeben, welches die Kirchhoffsche Beugungstheorie als Spezialfall der ersten Näherung enthält und welches nicht nur für den schwarzen Schirm anwendbar ist, sondern auch Brechung und Reflexion berücksichtigen kann. Es ist nicht auf kurze Wellenlängen beschränkt. Für die blanke Halbebene werden die beiden ersten Näherungen, für die blanke kleine Kugel werden alle Näherungen berechnet.

J. Meixner (Aachen).

Fragstein, Conrad von: Zur Seitenversetzung des totalreflektierten Lichtstrahles. *Ann. Physik*, VI. s. 4, 271—278 (1949).

Goos und Hänchen hatten bei vielfacher Totalreflexion eines begrenzten Lichtbündels eine durch die Totalreflexion hervorgerufene geringe Seitenverschiebung des (begrenzten) Strahlenbündels relativ zu der geometrisch zu erwartenden Lage gefunden. K. Artmann hatte diese Seitenverschiebung im Anschluß an frühere Untersuchungen des Ref. über die

Verhältnisse bei der Totalreflexion theoretisch zu deuten versucht, wobei sich auch eine Seitenverschiebung durch die Totalreflexion ergab, die allerdings für parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht verschiedene Beträge annehmen sollte, entgegen den experimentell gefundenen Tatsachen. Nachdem s. Z. die Untersuchung des Ref. über die Erscheinungen bei Totalreflexion eines seitlich begrenzten Strahlenbündels erschienen war — aus der übrigens das Auftreten einer Seitenverschiebung qualitativ unmittelbar abgelesen werden kann —, wurde von Cl. Schäfer und R. Pich die Totalreflexion unter modifizierten Voraussetzungen nochmals theoretisch behandelt. Verf. vorliegender Arbeit legt nun seinen Untersuchungen über die Seitenverschiebung des total reflektierten Lichtstrahls die Arbeit Cl. Schäfers und R. Pichs zugrunde, aus der er gleichfalls — wie K. Artmann — theoretisch den zu erwartenden Betrag der Seitenverschiebung ableiten kann und zu den gleichen quantitativen Ausdrücken wie Artmann kommt. Auch die Abhängigkeit des Betrages der Seitenversetzung von der Polarisationsrichtung findet er in Übereinstimmung mit den Untersuchungen von K. Artmann, entgegen den experimentellen Befunden von Goos und Hänchen. *Picht* (Potsdam-Babelsberg).

Arziès, Henri: Propriétés de l'onde évanescence obtenue par réflexion totale. Rev. Optique théor. instrum., Paris 27, 205—244 (1948).

Die Arbeit bildet die Fortsetzung einer früheren Untersuchung des Verf. [Ann. Physique 1, 5—69 (1946)] über Reflexionsfragen, in denen er — wie er angibt — u. a. auch bereits verschiedene Resultate mitgeteilt hat, die sich auf die Theorie der Totalreflexion und der dabei im zweiten Medium auftretenden inhomogenen Wellen beziehen. Leider übernimmt er aus jener Arbeit sowohl die Bezeichnungen als auch verschiedene Formeln, ohne auf die Bedeutung der einzelnen Zeichen noch einmal kurz hinzuweisen. — Bei der inhomogenen Welle handelt es sich bekanntlich um eine Welle, deren Intensität mit zunehmendem Abstand von der Trennfläche rasch abklingt. — Es werden in der Arbeit nun zunächst allgemeine Folgerungen über den Abklingungskoeffizienten und über die Phasengeschwindigkeit gezogen, indem die entsprechenden Formeln mathematisch diskutiert werden. Weiter wird der Vektor der abklingenden Welle untersucht, wobei der Verf. darauf hinweist, daß die Fresnelschen Reflexionskoeffizienten nicht ohne weiteres übernommen werden dürfen, wenigstens nicht für den in der Einfallsebene schwingenden Vektor, da es sich bei diesem um eine elliptisch-polarisierte Schwingung handele. Auch die hier auftretenden Koeffizienten werden eingehend diskutiert, sowohl in ihrer Abhängigkeit vom Einfallswinkel als auch vom Brechungsindex. Es wird weiter der Energiefluß in den abklingenden unbegrenzten ebenen Wellen im zweiten Medium untersucht, wobei der Verf. ähnliche Überlegungen durchführt, wie sie früher von Eichenwald bereits mitgeteilt wurden. Auch auf die Arbeit des Ref. [Ann. Physik, V. s. 11, 141 (1931)] zur Frage der Totalreflexion geht der Verf. näher ein, ohne sich für oder gegen sie zu entscheiden, da eine solche Entscheidung nur durch das Experiment erbracht werden könne. *Picht* (Potsdam-Babelsberg).

Toraldo di Francia, G.: Sulla luce diffratta da innumerevoli aperture distribuite a caso su un diaframma opaco. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 4, 730—735 (1948).

Verf. beschäftigt sich in dieser Arbeit mit der Beugung des Lichtes an einer großen Zahl von willkürlich verteilten Öffnungen in einer undurchsichtigen Blende. Er weist zunächst darauf hin, daß bei der Behandlung dieses Problems zwei Fälle zu unterscheiden sind, die beide bereits mehrfache Behandlung gefunden haben. Der erste Fall ist der, in dem man wegen einer kontinuierlichen und schnellen Änderung der Verteilung der Öffnungen oder auch wegen der Schwächung der Lichtquelle einen Mittelwert der verschiedenen zufälligen Verteilungen nehmen muß. Der zweite Fall des Problems liegt vor, wenn die Verteilung der Öffnungen unveränderlich ist und die Lichtquelle genügend klein ist. Mit diesem zweiten Fall beschäftigt sich der Verf. Er geht aus von N beugenden Öffnungen, die willkürlich über einen endlichen Bereich einer ebenen Fläche verteilt seien. Die Öffnungen werden untereinander als gleich und gleich orientiert vorausgesetzt, was — nach An-

sicht des Verf. — keine wesentliche Einschränkung der Problemstellung bedeutet. Er gibt sodann (in allgemeiner Form) den Ausdruck für die komplexe Amplitude des von einer Öffnung in der durch α, β bestimmten Richtung gebeugten Lichtes, die außer von α, β noch von der Richtung des einfallenden Lichtes und der Lage der betreffenden Öffnung abhängt. Diese komplexe Amplitude läßt sich als (ebener) Vektor deuten. Durch Summation aller den willkürlich verteilten Öffnungen entsprechender Vektoren ließe sich der resultierende Vektor finden. Verf. gibt den Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, daß die Komponenten des resultierenden Vektors im Intervall $(X, X + dX)$ und $(Y, Y + dY)$ liegen. Die hierin zunächst auftretenden Koeffizienten werden weiter untersucht und formelmäßig dargestellt. Für den Fall, daß keine Dispersion der optischen Wege besteht, findet Verf. den von Lord Rayleigh sowie von v. Laue abgeleiteten Wert der Wahrscheinlichkeit. Der gleiche Wert ergibt sich auch, wenn starke Dispersion der optischen Wege angenommen wird.

Picht (Potsdam-Babelsberg).

Herpin, André: *Réflexion de la lumière sur des milieux isotropes doués de pouvoir rotatoire.* Rev. Optique théor. instrum., Paris 28, 65—78 (1949).

Zunächst allgemeine Überlegungen über die Reflexion einer geradlinig polarisierten (= Überlagerung von zwei in entgegengesetztem Sinne zirkular polarisierten) Welle an der Oberfläche eines doppelbrechenden Mediums. Aus molekulartheoretischen Überlegungen resultiert Drehung der polarisierten Welle auch bei der Reflexion, da diese ja eine Folge der im Medium angeregten sekundären Wellen ist. Hinweis, daß in einer späteren Arbeit die magnetische Drehung der Polarisations-ebene behandelt werden soll, während sich vorliegende Arbeit mit der natürlichen Drehung beschäftigt. Kurze Diskussion der charakteristischen Unterschiede. Es folgt die eingehende mathematische Behandlung der Verhältnisse bei der Reflexion an natürlich-aktiven Medien nach der elektromagnetischen Lichttheorie, wobei Verf. von den Maxwellschen Gleichungen und den den Rotationsparameter g enthaltenden Beziehungen $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} - \frac{g}{c} \vec{B}$; $\vec{B} = \vec{H} + \frac{g}{c} \vec{E}$ ausgeht, die sich sowohl nach der klassischen (Bornschen) als auch nach der Quantentheorie ergeben. Es wird eine Lösung der Gleichungen in Form einer ebenen Welle gesucht, die, wie üblich, in komplexer Schreibweise eingeführt wird, wodurch in den Ausgangsgleichungen die zeitlichen Ableitungen eliminiert werden. Durch weitere Elimination von \vec{D} , \vec{H} und \vec{B} ergibt sich eine komplexe Gleichung für \vec{E} , zerfallbar in zwei Gleichungen für die Komponenten von \vec{E} , deren gleichzeitiges Bestehen die Abhängigkeit der Brechungsindizes für die beiden zirkularpolarisierten Wellen von der Dielektrizitätskonstanten und dem Rotationsparameter ergibt. Es werden für beide (+ und -) Drehungen die aus den Ausgangsgleichungen folgenden Darstellungen von \vec{B} , \vec{D} und \vec{H} als Funktionen von \vec{E} gegeben, die Reflexionskoeffizienten berechnet und diese eingehend diskutiert, auch für den Fall, daß an der Grenzfläche Totalreflexion auftritt.

Picht (Potsdam-Babelsberg).

Richardson, H. O. W.: *The focusing of β -rays in a prolate spheroidal magnetic field.* Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, VII. s. 40, 233—244 (1949).

Die Arbeit enthält eine eingehende Diskussion darüber, ob und inwieweit für die β -Strahl-Spektroskopie ein magnetisches Feld zwischen Polflächen, die Umdrehungs-Hyperboloide darstellen, angewandt werden kann. Zur theoretischen Behandlung und zur Bestimmung des Verlaufs der β -Strahlen benutzt der Verf. das Vektorpotential und die magnetische Feldstärke. Zur weiteren Behandlung werden „abgeplattete sphäroidale“ Korodinen eingeführt. Für das magnetische Feld ist Rotationssymmetrie vorausgesetzt. Auf Grund der theoretischen Behandlung des Strahlenverlaufs wird für einige spezielle Fälle dieser Strahlenverlauf auf

Grund vorgenommener Berechnungen in einigen Kurven graphisch dargestellt, wobei angenommen wird, daß die Strahlen von einem Punkt auf der Symmetrieachse ausgehen. Die Strahlen einer Meridianebene haben zwei Überkreuzungspunkte, von denen der eine auf der Achse, der andere seitlich von der Achse liegt und — infolge der rotations-symmetrischen Verhältnisse — durch eine kreisförmige Blende herausgeblendet werden kann.

Picht (Potsdam-Babelsberg).

Quantenmechanik:

Moyal, J. E.: Quantum mechanics as a statistical theory. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 99—124 (1949).

Es wird versucht, die Quantenmechanik als eine Form einer nichtdeterministischen statistischen Mechanik zu deuten. Im ersten Teil wird gezeigt, daß man jeder (etwa im Koordinatenraum definierten) Wellenfunktion $\psi(q)$ in eindeutiger Weise eine Verteilungsfunktion im Phasenraum $F(q, p)$ zuordnen kann; dafür kommt es darauf an, eine Theorie der Funktionen von nicht vertauschbaren Operatoren zu haben. Im zweiten Teil wird aus den Bewegungsgleichungen der Quantenmechanik eine Gleichung für die zeitliche Änderung der Verteilungsfunktion $F(q, p, t)$ abgeleitet

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} F(q, p, t) = \frac{2}{\hbar} \left[\sin \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p_F} \frac{\partial}{\partial q_H} - \frac{\partial}{\partial p_H} \frac{\partial}{\partial q_F} \right) \right] H(q, p) F(q, p, t).$$

H = Hamilton-Funktion; $\partial/\partial p_F$ bedeutet Differentiation nach p , soweit p in F vorkommt usw.; $\sin \hbar/2 ()$ ist als Potenzreihenentwicklung des Operators im Argument aufzufassen. Diese Gleichung (1) bzw. andere ihr äquivalente oder noch allgemeinere Darstellungen (in denen statt q, p ein beliebiges vollständiges System vertauschbarer Operatoren und das komplementäre System zugrunde gelegt werden) hat die Form, die für einen dynamischen, stochastischen Prozeß charakteristisch ist. (1) kann die Schrödingergleichung bei der Lösung quantenmechanischer Aufgaben ersetzen. Der dritte Teil behandelt die Verteilung der Mitglieder von großen Gesamtheiten (Gibbssche Gesamtheiten) und gibt einen Ausblick auf die Anwendung der Quantenmechanik auf kinetische Theorien der Materie. Das Auftreten von negativen Werten von $F(q, p, t)$ [negative Wahrscheinlichkeiten, siehe auch F. Bopp, Z. Naturforsch. 2a, 202 (1947)], das Eigenwertproblem und die Eigenfunktionen im Phasenraum, das Problem des Determinismus in der Quantenmechanik, die Grenzen der Theorie, ihre Eindeutigkeit und die Möglichkeiten einer experimentellen Bestätigung werden diskutiert.

J. Meixner (Aachen).

Erikson, Henry A. and E. L. Hill: A note on the one-electron states of diatomic molecules. Physic. Rev., Minneapolis, II. s. 75, 29—31 (1949).

Die Bewegungsgleichungen für einen Massenpunkt im Kraftfeld zweier Coulombscher Zentren (Ladungen $Z_1 e$ und $Z_2 e$) haben in der klassischen Mechanik ein Integral

$$\Omega = \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 + 2me^2 a (Z_1 \cos \vartheta_1 + Z_2 \cos \vartheta_2),$$

wo \mathfrak{L}_1 und \mathfrak{L}_2 die Drehimpulsvektoren in bezug auf die Zentren, $2a$ der Zentrenabstand und ϑ_1, ϑ_2 die Winkel der Verbindungen des Massengewichtes und je eines Zentrums mit der Zentrenachse ist. In der Quantenmechanik ist der entsprechende Operator

$$\Omega = \frac{1}{2}(\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_1) + 2me^2 a (Z_1 \cos \vartheta_1 + Z_2 \cos \vartheta_2)$$

mit dem Hamiltonoperator H und dem Operator des Drehimpulses um die Zentrenachse vertauschbar. Die Eigenwerte des Operators $\Omega + 2ma^2 H$ hängen mit dem Parameter zusammen, der bei Separation in elliptischen Koordinaten auftritt.

F. Hund (Jena).